Tema 1. NÚMEROS REALES RESUMEN

Conjuntos numéricos:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbf{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$; $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$

$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$, con $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$ $\quad \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

$$\text{Reales}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteros}\begin{cases}\text{Naturales}\\ \text{Negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}$$

Operaciones con números reales

Reglas de los signos. Propiedad distributiva. Factor común

Propiedades del orden

Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$; $a \cdot c < b \cdot c$ cuando $c > 0$; $a \cdot c > b \cdot c$ cuando $c < 0$

Intervalos. Los intervalos son subconjuntos de la recta real.

- abierto $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$.

Intervalos infinitos: $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$; $(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$; $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$.

Valor absoluto: $|a| = a$ si $a > 0$. $|a| = -a$ si $a < 0$.

Intervalos mediante valor absoluto.

- $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \Leftrightarrow x \in (-k, k)$. $|x| \le k \Leftrightarrow -k \le x \le k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$.
- $|x - a| \le k \Leftrightarrow -k \le x - a \le k \Leftrightarrow x \in [a - k, a + k]$.

Propiedades de las potencias. Repasar las dadas en el Tema 2

Radicales: $\sqrt{a} = b$, $a > 0 \Leftrightarrow b^2 = a$ $\quad \sqrt[n]{a} = b, n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow b^n = a$ $\quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Propiedades y operaciones con radicales

- Producto de radicales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n + 1/m}$$

- Potencia y raíz de un radical: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- Cociente de radicales: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \dfrac{a^{1/n}}{a^{1/m}} = a^{1/n - 1/m}$
- La suma y resta de radicales sólo puede "hacerse" cuando son radicales semejantes. Alguna vez los radicales pueden hacerse semejante, extrayendo o introduciendo factores en la raíz.

Introducción: $\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$. Para introducir un factor se eleva al índice de la raíz.

Extracción: $\boxed{\sqrt[n]{Ab} = \sqrt[n]{A}\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}}$, supuesto que $\sqrt[n]{A} = a$.

- Racionalización de denominadores

Los casos usuales son: $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$; $\quad \dfrac{a}{b + \sqrt{c}}$; $\quad \dfrac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Se racionalizan multiplicando los dos términos de las fracciones por $\sqrt{b}$, por $b - \sqrt{c}$ y por $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, respectivamente.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- El logaritmo de la base es 1 : $\log_a a = 1$
- El logaritmo de 1 es 0 : $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia: $\log_a p^n = n. \log_a p$
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos:
  $$\log_a (p.q) = \log_a p + \log_a q$$
- El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos:
  $$\log_a (p/q) = \log_a p - \log_a q$$
- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice :
  $$\log_a \sqrt[n]{p} = \frac{\log_a p}{n}$$

TEMA 1.- Números reales

1. Clasifica cada número en el conjunto **"más pequeño"** al que pertenezca ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, o a ninguno de ellos). Razona tu respuesta en aquellos casos que sea necesario.

a) $7,2343$; b) $\sqrt[4]{-16}$; c) $-\dfrac{42}{14}$; d) $-12,101100111000111110000\ldots$; e) $\sqrt{625}$; f) $\sqrt[5]{-5}$; g) $\dfrac{4}{12}$; h) 5 ; i) -7;

j) $0,23$; k) $\dfrac{5}{4}$; l) $\sqrt{\dfrac{18}{2}}$; m) $-\sqrt{3}$; n) $\sqrt[3]{-5}$; ñ) $\dfrac{\pi}{2}$; o) $4,\widehat{7}$; p) $\sqrt{-4}$; q) $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}$; r) $\ln_7 343$; s) $81^{\frac{1}{4}}$; t) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

2. Utilizando las propiedades de las potencias simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2^3\cdot(-4)^2\cdot 3^2}{6^3\cdot(-9)^3}$ **b)** $\dfrac{2^{-4}\cdot(-4)^2\cdot 3\cdot 9^{-1}}{(-2)^{-5}\cdot 8\cdot 9\cdot 3^2}$ **c)** $\dfrac{(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{-1}{2}}\cdot b^{-2}}$ **d)** $\left(\dfrac{2}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{3}{10}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{12}{5}\right)^{4}$

e) $\dfrac{\left(2^{-1}\cdot 3^2\right)^{-3}}{8^2\cdot 3^{-3}}$ **f)** $\left(\left((-2)^{-3}\right)^4\right)^{-1}$ **g)** $\dfrac{(-5)^3\cdot(-8)^3\cdot(-9)^2}{15^{-2}\cdot(-20)^4}$

3. Simplifica las siguientes expresiones con radicales, extrayendo factores del radical en los casos que sea posible:

a) $\sqrt[3]{24}$; b) $\sqrt[6]{27}$; c) $\sqrt[3]{-108}$; d) $\sqrt[12]{64y^3}$; e) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$; f) $3\sqrt{8a^3}$; g) $\sqrt{x^4y^6}$; h) $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$;

4. Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}$; c) $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[5]{10}$; d) $\sqrt[4]{72}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[6]{100}$

5. Efectúa y simplifica. Extrae factores, si es posible:

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}$; b) $\dfrac{\sqrt[8]{625}}{\sqrt[4]{25}}$; c) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$; d) $2\sqrt{\dfrac{4}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{8}}$; e) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{8}}$; f) $\left(\sqrt[6]{32}\right)^3$; g) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt{a}}$;

h) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}\cdot\sqrt{a}$; i) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$; j) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$; k) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$; l) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$; m) $\sqrt[3]{\sqrt{16}}$; n) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$;

6. Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$; b) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$; c) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}$;

d) $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{2}$; e) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{18}{125}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8}{45}}$; f) $\dfrac{1}{3}\sqrt{5}-\dfrac{1}{6}\sqrt{20}+\dfrac{1}{8}\sqrt{45}$;

7. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$; b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$; c) $\left(\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; d) $\left(2-\sqrt{5}\right)\left(3+2\sqrt{5}\right)$; e) $\left(1-\sqrt{2}\right)^3$;

f) $\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{-2}\right)$; g) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-1\right)$; h) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)$; i) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)2\sqrt{2}$;

8. Expresa los siguientes conjuntos mediante intervalos:

a) $\{x\in\mathbb{R} : -2<x\leq 8\}$; b) $\{x\in\mathbb{R} : 4\leq x\leq 12\}$; c) $\{x\in\mathbb{R} : 1<x\}$; d) $\{x\in\mathbb{R} : x\leq 5\}$; e) $\left\{x\in\mathbb{R} : x>\dfrac{1}{2}\right\}$

9. Considera los números $A=3,2\cdot 10^7$, $B=5,28\cdot 10^4$ y $C=2,01\cdot 10^5$. Calcula el valor de $\dfrac{B+C}{A}$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da unta cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

10. Calcula en notación científica sin usar la calculadora. Expresa el resultado en notación científica.

a) $(800000:0,0002)\cdot 0,5\cdot 10^{12}$; b) $0,486\cdot 10^{-5}+93\cdot 10^{-9}-6\cdot 10^{-7}$

11. Opera con la calculadora utilizando tres cifras significativas:

a) $(3,87\cdot 10^{15}\cdot 5,96\cdot 10^{-9}):(3,941\cdot 10^{-6})$; b) $8,93\cdot 10^{-10}+7,64\cdot 10^{-10}-1,42\cdot 10^{-9}$

12. Calcula el valor de x en cada caso, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_x 64 = 3$ c) $\log_3 x = 4$

13. Utilizando la definición de logaritmo, calcula:

a) $\log_2 32 + \log_3 \sqrt[3]{81} - \log_5 \frac{1}{25}$

b) $\log_2 \frac{1}{8} + \log_3 \sqrt{27} - \log_4 1$

14. Indica si es verdadero o falso razonando tu respuesta:

a) $\log 1000x = 3 \log x$

b) $2\log x - \frac{3}{4}\log y + 3\log z = \log \frac{x^2}{\sqrt[4]{y^3 z^3}}$

Tema 2. CONCEPTOS ALGEBRAICOS BÁSICOS

Operaciones con fracciones

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$; $a\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm c}{d}$; $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $a\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}$ $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ $a:\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}$

Prioridad de operaciones y uso de paréntesis

Cuando las operaciones aparecen combinadas, primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones; por último, las sumas y restas.

Propiedades de las potencias

$a\cdot a\cdot ......a=a^n$ $\qquad a^0=1$, si $a\neq 0$ $\qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$; $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$; $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$;

Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.

Multiplicación de polinomios

Se utiliza la propiedad distributiva del producto y las propiedades de la potenciación.

Productos notables: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

División de monomios. Se basa en la simplificación de fracciones y en las operaciones con potencias..

División de polinomios. Regla de Ruffini.

Valor numérico de un polinomio, P(x), para $x=a$ es el número que se obtiene cuando se sustituye x por a. Se denota por P(a).Se dice que a es una raíz de P(x) cuando P(a) = 0.

Teorema del resto. El valor numérico del polinomio P(x) para $x=a$ (esto es, P(a)) es igual al resto de la división P(x) : ($x-a$).

Teorema del factor. ($x-a$) es un factor del polinomio P(x) $\Leftrightarrow$ $x=a$ es una raíz de P(x). (Esto es, P(a) = 0.)

Raíces del polinomio P(x) son las soluciones de la ecuación P(x) = 0. Si conocemos que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de P(x), entonces el polinomio es de la forma

$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, c es una constante.

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de factores irreducibles. Para ello:

1º: Hay que buscar las raíces (utilizando los métodos de resolución de ecuaciones; o *a ojo* (por tanteo) si el polinomio es de grado mayor o igual a 3. En este caso, si hay raíces enteras son divisores del término independiente).

2º. Cuando se conozca alguna raíz, conviene dividir (por Ruffini) para obtener factores de menor grado, y, por tanto, más cómodos de manejar.

3º. Conviene saber que un polinomio tiene tantas raíces como indica su grado (esas raíces pueden ser simples, múltiples (repetidas) o complejas; en este último caso no se hallan).

4º. En consecuencia, un polinomio de grado *n* tiene un máximo de n factores irreducibles.

Fracciones algebraicas

- $\frac{A(x)}{B(x)}\pm\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)\pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}$; $\frac{A(x)}{B(x)}\pm C(x)=\frac{A(x)\pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)}$
- $\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}$; $\qquad \frac{A(x)}{B(x)}:\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$

CONCEPTOS ALGEBRAICOS BÁSICOS (Pendientes de Matemáticas CCSS)

Tipo I. Operaciones con polinomios

1. Calcula y simplifica:

a) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(2+\frac{4}{5}\right)$ b) $\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\cdot\left(2+\frac{4}{5}\right)$ c) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot 2+\frac{4}{5}$

d) $\frac{2}{5}:\frac{7}{4}$ e) $-\frac{2}{15}:\frac{14}{42}$ f) $-\left[-\frac{1}{2}-(-4)\right]$

[sol] a) $\frac{49}{75}$; b) $-\frac{1}{15}$; c) $\frac{19}{15}$; d) $\frac{8}{35}$; e) $-\frac{2}{5}$; f) $-\frac{7}{2}$

2. Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\frac{64a^3b^2}{32a^4b}$ b) $\frac{6^2\cdot 3^5\cdot 2^6\cdot 33^5}{18^3\cdot 121^2\cdot 12^4}$ c) $\left(\frac{26x^2y^7z^2}{8xy^2z^3}\right)^2:\frac{13x^4yz^3}{32x^2y^2z}$

[sol] a) $\frac{2b}{a}$ b) $\frac{99}{8}$ c) $\frac{26y^{11}}{z^4}$

3. Expresa algebraicamente:

a) Cuatro veces *x* menos su décima parte.
b) El precio de una entrada de cine es *x* más el 6 por 100 de I.V.A. aplicado sobre *x*.

[sol] a) $4x-\frac{x}{10}$ b) $P=x+\frac{6}{100}x$

4. La expresión $C(t)=2000\cdot(1+0{,}05)^t$ da el capital acumulado al cabo de t años para un capital inicial de 2000 € puesto a un 5 % de interés en un determinado banco. ¿Cuál será ese capital al cabo de 2 años? ¿Y al cabo de 4 años?

[sol] 2205 €; 2431,01 €

5. Haz las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $(3x^3-5x^2+7x-5)(-3x^2+5x-4)$ b) $\left(-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$

c) $(4x^2-6x+5)(3x^3-4x^2-2)$ d) $(5x^2+3x-5)(7x^3-6x+3)$

[sol] a) $-9x^5+30x^4-58x^3+70x^2-53x+20$ b) $-\frac{2}{15}x^4+3x^3-\frac{2251}{150}x^2+\frac{13}{10}x+\frac{1}{5}$
c) $12x^5-34x^4+39x^3-28x^2+12x-10$ d) $35x^5+21x^4-65x^3-3x^2+39x-15$

6. Haz las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(20x^3+12x^4+29-39x^2-28x):(4x^2-5)$ b) $(2x^3-3x+2):(2x-1)$

[sol] Damos el resto. a) $-3x-1$ b) $\frac{3}{4}$

7. Halla:

a) $(x-6)^2$ b) $(4+x^2)^2$ c) $(2x-1)^2$ e) $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{2}x-5\right)$

[sol] a) $x^2-12x+36$ b) $16+8x^2+x^4$ c) $4x^2-4x+1$ d) $\frac{1}{4}x^2-25$

8. Utiliza la regla de Ruffini para hacer las siguientes divisiones:

a) $(x^5+x-2x^3):(x-1)$ b) $(2x^3-x^5-3x):(x-3)$

[sol] Resto: a) 0; b) –198; c) –3

Tipo II. Factorización de polinomios

9. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ b) $P(x) = 2x^2 + x - 15$

c) $P(x) = 8x^4 + 80x^3 + 200x^2$ d) $P(x) = 6x^5 + 14x^4 + 4x^3$

[sol] a) $3x(x - 1)(x - 2)$ b) $2(x + 3)(x - 5/2)$ c) $8x^2(x + 5)^2$ d) $6x^3(x + 2)(x + 1/3)$

10. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x = -5$ y que $P(2) = -7$

[sol] $x^2 + 2x - 15$

Tipo III. Fracciones algebraicas

11. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{21x^2}{7x-14x^2}$ b) $\dfrac{4-x}{3x-12}$ c) $\dfrac{3x^2-4x}{x^3}$

[sol] a) $\dfrac{3x}{1-2x}$ b) $-\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{3x^2-4}{x^2}$

12. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+6x-7}{2x-2}$ b) $\dfrac{4x^2-40x+100}{4x^2-100}$ c) $\dfrac{3x^3-6x^2}{3x^4+24x^3-60x^2}$

[sol] a) $\dfrac{x+7}{2}$ b) $\dfrac{x-5}{x+5}$ c) $\dfrac{1}{x+10}$

13. Halla, simplificando el resultado:

a) $x-1+\dfrac{2}{x+1}$ b) $2x-\dfrac{x-1}{x^2}$

c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{8}{x^4}$ d) $\dfrac{3x-2}{x}-\dfrac{3x-3}{x+2}$

[sol] a) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ b) $\dfrac{2x^3-x+1}{x^2}$ c) $\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^4}$ d) $\dfrac{7x-4}{x(x+2)}$

14. Halla, simplificando el resultado:

a) $\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x+1}{x+2}$ b) $\dfrac{x+3}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9}$

[sol] a) $\dfrac{x^2+x-2}{x}$ b) $\dfrac{x-2}{x-3}$

Tipo IV. Aplicaciones

15. Desde Sevilla a Toulouse se puede ir en un número exacto de horas viajando a 100 km/h o a 130 km/h de velocidad media. ¿Qué distancia hay entre las dos ciudades, si a 80 km/h se tarda menos de 25 horas?

[sol] 1300 km.

16. De una cuba llena de vino se saca 1/6 de su capacidad; después, 1/4 de lo que queda. Si aún quedan 100 litros, ¿cuál es la capacidad de la cuba?

[sol] 160 litros

17. Un grifo llena un depósito en 10 horas, y otro en 8 horas.

a) ¿Cuánto llenan entre los dos en una hora?

b) ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre los dos?

[sol] a) 9/40 b) $\dfrac{40}{9}$ horas

TEMA 3. Ecuaciones e inecuaciones

Ecuaciones

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones. Para ello, se ha de transformar la ecuación dada en otra equivalente a ella cuyas soluciones se obtengan de forma simple.
Las transformaciones a que habitualmente es sometida una ecuación se basan en las reglas:
1. Si se suman a los dos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, las soluciones de la ecuación no varían.
2. Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un número distinto de 0, la ecuación resultante es equivalente a la dada.
3. Si $A(x) \cdot B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$ o $B(x) = 0$.

Ecuaciones de primer grado: son de la forma $ax + b = 0$. También se llaman lineales.

Se resuelve así: $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

Aplicaciones: Resolución de problemas de edades, de proporciones y de mezclas.

Ecuaciones de segundo grado: su forma más simple es: $ax^2 + bx + c = 0$.

Sus soluciones son: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Pueden tener dos, una o ninguna solución.

Casos particulares: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$. No siempre tiene solución.

$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -\dfrac{b}{a}$.

Interpretación geométrica de las soluciones: la función $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola; los puntos de corte de dicha parábola con el eje de abscisas son las soluciones de $x^2 + bx + c = 0$.

Ecuaciones irracionales: contienen al menos un término en el que la incógnita está bajo el signo radical. Se resuelven aislando la raíz. Suelen dar lugar a una ecuación de segundo grado. Hay que comprobar las soluciones halladas.

Ecuaciones bicuadradas: Son ecuaciones de grado cuatro, de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$
Haciendo $x^2 = t$ queda $at^2 + bt + c = 0$

Ecuaciones de grado superior a dos: son del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $n \geq 3$.
Para resolverlas hay que descomponer el polinomio asociado en factores, si se puede. Debe recordarse que si la ecuación tiene soluciones enteras serán divisores del término independiente.

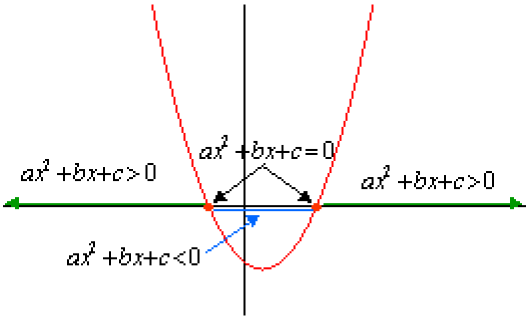
Ecuaciones racionales. Son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = k$. Se resuelven eliminando denominadores y pasando a una ecuación que responda a alguno de los tipos estudiados con anterioridad. Hay que comprobar que las soluciones obtenidas son válidas.

Inecuaciones
Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Los valores de las incógnitas que cumplen la desigualdad son las soluciones. En general, una inecuación admite infinitas soluciones. Para resolver una inecuación hay que tener en cuenta las propiedades del orden.
Si $a \le b \Rightarrow a+c \le b+c$; $a \cdot c \le b \cdot c$ si $c > 0$; $a \cdot c \ge b \cdot c$ cuando $c < 0$.

Inecuaciones lineales con una incógnita. Son de la forma $ax + b \ge 0$.
Solución: $ax + b \ge 0 \Rightarrow ax \ge -b \Rightarrow x \ge -b/a$, si $a > 0$; $x \le -b/a$, si $a < 0$.

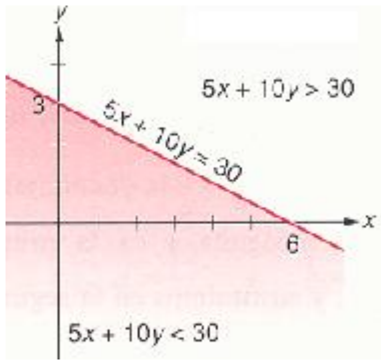
Inecuaciones de segundo grado. Son de la forma $ax^2 + bx + c \ge 0$
Su resolución está ligada a la solución de su ecuación asociada, $ax^2 + bx + c = 0$, pues si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación, entonces $ax^2 + bx + c \ge 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) \ge 0$.
Estudiando los signos de cada factor se determinan los intervalos solución.
Es útil representar las soluciones x_1 y x_2 en la recta real y estudiar el signo de $a(x - x_1)(x - x_2)$ en los intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y $(x_2, +\infty)$.

Resolución gráfica. La solución de $ax^2 + bx + c \ge 0$ se corresponde con el intervalo en el que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta o está por encima del eje OX. Véase la figura.



Inecuaciones racionales. En ellas la incógnita aparece en un denominador. Para resolverla hay que expresarla en la forma $0 \le \frac{A(x)}{B(x)}$ (sin más términos).
Las soluciones se obtienen analizando los signos $A(x)$ y $B(x)$ para determinar el signo del cociente. Una buena estrategia consiste en señalar sobre una recta las soluciones de $A(x) = 0$ y de $B(x) = 0$, e ir estudiando el signo del cociente en los sucesivos intervalos que se presente.

Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Una inecuación lineal con dos incógnitas x e y es una expresión de la forma $ax + by < c$. El signo $<$ puede sustituirse por $>$, $\le$ o $\ge$; a, b y c representan números.
El conjunto de valores solución de estas inecuaciones son las coordenadas de los puntos que están en uno de los semiplanos en los que divide la recta $ax + by = c$ al plano. Es decir, el conjunto solución es una porción del plano y debemos encontrarla de forma gráfica: no tenemos más remedio que dibujar. Los signos de los coeficientes a y b son los que determinan qué semiplano es. En el caso de inecuaciones con $\le$ o $\ge$, en el conjunto de soluciones también se incluyen los



puntos de la recta. (Véase figura.)

ECUACIONES E INECUACIONES (Pendientes de Matemáticas CCSS I)

Tipo I: Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve: $\frac{x-1}{4}-\frac{2(x+2)}{3}=\frac{3x+1}{6}$ [sol] –21/11

2. Juan gasta un tercio del dinero que tiene en la compra de un libro. Más tarde, paga la entrada al cine, costándole la mitad del dinero que le queda más 0,72 euros. Si aún le sobran 2,25 €, ¿cuánto dinero tenía en un principio? [sol] 8,91 €

3. Tres operarios trabajan en total 96 horas semanales en una cadena de producción. Si el tiempo dedicado por uno de ellos a este fin son los 3/5 del tiempo empleado por otro y éste los 5/8 del dedicado por el tercero, ¿□qué horas semanales permanece en la cadena cada trabajador?
[sol] 18, 30 y 48.

4. Un padre tiene actualmente 47 años y la suma de las edades de sus dos hijos es de 31. ¿Dentro de cuántos años la suma de las edades de los hijos será la edad del padre?
[sol] 16

5. Se mezclan 50 litros de aceite de girasol de 0,99 €/l con aceite de 0,78 €/l, obteniéndose una mezcla de 0,9 €/l. ¿□Cuántos litros se han empleado del aceite más barato?
[sol] 37,5

Tipo II: Ecuaciones de segundo grado

6. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $3x^2 + x = 0$ b) $3(x + 1)^2 = 27$ c) $4x^2 – 4x – 35 = 0$

[sol] a) 0 y –1/3; b) 2 y –4; c) 7/2 y –5/2

7. ¿Cuánto tiene que valer *c* en la ecuación $3x^2 + 5x + c = 0$ para que posea dos, una o ninguna solución?
[sol] Respectivamente: $<, =, >$ 25/12

8. Una obra la realizan dos operarios, trabajando conjuntamente, en 12 días. Uno de ellos emplea 10 días más que el otro si trabaja sólo. ¿Cuántos días necesita cada obrero para completar la obra en solitario? [sol] 20 y 30

Tipo III: Ecuaciones reducibles a cuadráticas

9. Resuelve las ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}$ b) $x-\sqrt{x}=6$ c) $2x-3\sqrt{x-3}=x+3$

[sol] a) ±4; b) 9; c) 3 y 12

10. Calcula las soluciones de:

a) $x^4 – 9x^2 = 0$ b) $3x^2+1=\frac{8}{x^2+1}$ c) $x^4-3x^2+2=0$

[sol] a) 0, 3 y –3 b) ±1 c) $\pm\sqrt{2}$ y ±1

11. Resuelve:

a) $\frac{1-4x}{2x^2-1}=0$ b) $\frac{x^2-3x+2}{x\ \ +1}=0$ c) $\frac{-2}{3x-1}=\frac{4}{1-x}$ d) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+4}{x+2}$

[sol] a) 1/4 b) 2 y 1 c) 1/5 d) –8/5

Tipo IV: Inecuaciones

12. Resuelve las inecuaciones:

a) $3x < 0$ b) $\frac{x}{5}\geq -1$ c) $1-\frac{x}{2}\leq\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{x}<\frac{-1}{2}$

[sol] a) $x<0$ b) $x \geq -5$ c) $x \geq 2/3$ d) $x > -4$

13. Halla el intervalo solución de las inecuaciones:

a) $-x+2+4x > x+2$ b) $\frac{x}{3}-5x\leq 1-\frac{x}{2}$

c) $\frac{x+3}{-2}<\frac{x-1}{6}+1$ d) $2+\frac{3}{x}\geq -\frac{1}{5}$

[sol] a) $x > 0$ b) $-6/25 \leq x$ c) $-7/2 < x$ d) $x\leq -\frac{15}{11}$

14. Un pastor afirma que en su rebaño de 120 ovejas, el triple de las *churras* es mayor que el cuádruplo de las *merinas*. ¿Qué número mínimo de ovejas *churras* tiene el rebaño? [sol] 69

15. Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $x(x+1) < 0$ b) $-2x^2 + 10 > 26$ c) $4x^2 + 4x > 0$

[sol] a) $-1 < x < 0$ b) $\varnothing$ c) $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

16. Halla gráficamente la solución de las inecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 9x < 0$ b) $3x^2 - 27 > 0$ c) $(x+1)(x-3) > 0$

[sol] a) $(-9/2, 0)$ b) $\mathbf{R} - [-3, 3]$ c) $\mathbf{R} - [-1, 3]$

17. Resuelve gráfica y analíticamente la inecuación $-x^2 +2x +3 > 0$ [sol] (-1, 3)

18. Halla la solución de:

a) $\frac{2}{3x-2}\leq 0$ b) $\frac{x+2}{2x-1}\leq 1$ c) $0\leq\frac{-x}{x^2+1}$

[sol] a) $x < 2/3$ b) $(-\infty, ½) \cup [3, \infty)$ c) $x \leq 0$

19. Representa en la recta la solución de las inecuaciones:

a) $|x-2|<1$ b) $|x+1|>3$

[Sol] a) $1 < x < 3$. b) $x\in(-\infty,\ -4)\cup(2,+\infty)$

20. Resuelve las inecuaciones:

a) $\sqrt{x}\leq\frac{1}{3}$ b) $\sqrt{x+2}>2$ c) $\frac{-1}{\sqrt{2x+3}}>-2$

[sol] a) $[0, 1/9]$ b) $x > 2$ c) $x > -11/8$

TEMA 4. Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones.

Sistemas de ecuaciones

Resolver un sistema es hallar los valores de las incógnitas que satisfagan todas las ecuaciones. Para ello, se han de transformar las ecuaciones que lo componen con objeto de que dichas soluciones se obtengan de manera inmediata, despejando.
Las transformaciones recomendadas son:
1. Multiplicar todos los términos de una ecuación por un número.
2. Sumar o restar a una ecuación otra ecuación, buscando que se elimine alguna incógnita.
3. Cuando se conozca el valor de una incógnita sustituir su valor en las ecuaciones restantes.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas Su forma más simple es $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Hay varios métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción.
Pueden ser: compatibles determinados, si tienen una única solución; compatibles indeterminados, si tienen infinitas soluciones; incompatibles, si no tienen solución.
Interpretación geométrica de un sistema: un sistema de dos ecuaciones se puede interpretar como un par de rectas, cuya posición en el plano determinará el tipo de sistema de que se trate.
Discutir un sistema consiste en determinar de qué tipo es, compatible o incompatible, dependiendo del valor que tomen los coeficientes y los términos independientes

Sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas. Son de la forma: $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$

Solución: valores x_0, y_0, z_0 que satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones.
Para resolver estos sistemas conviene emplear el método de Gauss, con el fin de dejarlo en la forma $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \quad b_1 y + c_1 z = d_1 \\ \qquad c_2 z = d_2 \end{cases}$. Este sistema se resuelve fácilmente de "abajo" a "arriba".
Aplicaciones: planteamiento y resolución de problemas de sistemas.
Discutir un sistema consiste en determinar de qué tipo es, compatible o incompatible, dependiendo del valor que tomen los coeficientes y los términos independientes, que pueden darse en función de un parámetro.

Sistemas no lineales. En ellos, alguna de las ecuaciones que lo forman no es lineal. Suelen resolverse empleando el método de sustitución.
Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita. Son de la forma: $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ a'x+b' \geq 0 \end{cases}$

La solución de estos sistemas se obtiene resolviendo, por separado, cada una de las inecuaciones que lo componen y hallando los valores comunes a las soluciones encontradas.
Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Son de la forma $\begin{cases} ax+by \geq c \\ a'x+b'y \geq c' \end{cases}$

Un punto (x_0, y_0) es solución del sistema si lo es de cada una de las inecuaciones. El conjunto de soluciones viene dado por la región del plano común a las regiones solución de cada una de las inecuaciones. Por tanto, se debe resolver cada inecuación del sistema por separado y a continuación hallar la región del plano común a todas esas inecuaciones.

SISTEMAS (Pendientes de Matemáticas CCSS I)

Tipo I. Sistemas lineales y problemas asociados

1. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=-2 \\ 3x-5=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{2}-y=y+1 \\ \dfrac{x}{2}-y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=-y+1 \\ \dfrac{x-y}{2}=1-x \end{cases}$

[sol] a) 8/7, –11/7 b) 4, 1 c) 1/16, –5/8 d) 4/5, 2/5.

2. Añade a la ecuación 6x – 2y = –3 otra ecuación, de forma que resulte un sistema:
a) Determinado. b) Indeterminado. c) Incompatible.

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \quad\quad +2z=-1 \\ -x+3y+z=0 \\ \quad\quad y-3z=5 \end{cases}$

[sol] a) 1, 1, –1 b) 2, 0, –1 c) 5/3, 1, –4/3

4. La suma de edades de una madre y su hija es 42 años. Cuando la hija tenga la edad de la madre esa suma será de 90. ¿Cuántos años tienen cada una en la actualidad?
[sol] 33 y 9

5. Se mezclan 5 dl de esencia con 12 dl de agua de lavanda, pagándose por el perfume resultante 15,30 €. Si se mezclase 1 dl de cada colonia se pagarían 2,28 €. Calcula el precio del decilitro de la esencia.
[sol] 1,72 €

6. Se alea un lingote de oro puro con otro lingote de 75% de pureza, obteniéndose 1 kilo de aleación, con una pureza del 90%. ¿Cuántos gramos de cada tipo de lingote se han empleado?
[sol] 600 y 400

7. Compramos en un colmado 6 kg de café y 3 de arroz por lo que pagamos 31,8 €. Otro día, por 1 kg de café y 10 de arroz se pagan 20,5 €. ¿Cuánto nos costarían 5 kg de café y 12 de arroz?
[sol] 41,7 €

8. En dos tinajas de igual capacidad hay repartidos 100 litros de aceite. La primera se llenaría si vertiéramos los 2/3 del contenido de la segunda y ésta lo hará, si trasvasamos los 3/4 de la primera. □ ¿Cuántos litros contiene cada tinaja?
[sol] 400/7 y 300/7

9. Un individuo posee 20 monedas, unas son de 0,50 € y otras de 1 €. ¿Puede tener un total de 16 €?
[sol] Sí: con 8 y 12 monedas, respectivamente.

10. **[S]** Una empresa ha invertido 73.000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases A, B y C, cuyos costes por unidad son de 2.400 €, 1200 € y 1000 € respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo A ha sido la misma que la invertida en los de tipo B, averiguar cuántos aparatos ha comprado de cada clase.
[sol] 10, 20, 25

11. **[S]** En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en primer curso coincide con los de segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más el doble de los de primero superan en 250 al quíntuplo de los de tercero. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada curso.
[sol] 200, 100, 50

Tipo II. Sistemas no lineales

12. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{y+x}{6} = \dfrac{5}{6} \\ xy = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11 \\ xy = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - x = x - 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$

[sol] a) 3 y 2; 2 y 3 b) ±2 y ±1; ±√3/2, ±4/√3 c) 1, 1; –1/5, –7/5 d) 5, 1

13. Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo cuya área mide 20 cm^2 son dos números enteros consecutivos. ¿Cuánto mide la altura?
[sol] 4

14. Encuentra las dimensiones de un rectángulo de perímetro 110 m y área 700 m^2.
[sol] 20 por 35

Tipo III. Sistemas de inecuaciones

15. Halla en el plano la solución de:

a) $x - 2y \leq -1$ b) $\dfrac{x}{2} + y \geq 2$

16. Resuelve dando el resultado en forma de intervalo:

a) $\begin{cases} x \leq 2 \\ 2x - 1 \geq 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 3 > 5 \end{cases}$

[sol] a) ∅ b) (4, +∞)

17. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 2x \geq 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x-1) - y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Tema 5. FUNCIONES Y GRÁFICAS **Resumen**

Concepto de función

Una función entre dos conjuntos X e Y es una relación definida de tal manera que a cada elemento X le corresponde exactamente otro elemento (uno y sólo uno) de Y.
Cuando X e Y son el conjunto de los reales, **R**, la función se llama de variable real.
En una función intervienen dos variables, una independiente y otra dependiente. La independiente suele designarse por *x*; suele llamarse *y*. Si el par (x, y) pertenece a la función *f*, se dice que $y = f(x)$. Esquemáticamente se indican así: f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, esto es: $x \to y = f(x)$

Dominio de *f*, Dom(*f*). Es el conjunto de los *x* para los cuales existe el valor de $f(x)$.
La imagen o recorrido de una función *f*, Im(*f*), es el conjunto de valores que toma $f(x)$ cuando *x* pertenece al dominio; es, por tanto, el conjunto de resultados.

- Las funciones reales suelen darse mediante una fórmula o expresión algebraica. Por ejemplo: $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = \sqrt{3 - x}$. También se escribe: $y = x^2 - 3x$; $y = \sqrt{3 - x}$

Funciones definidas a trozos: $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x < a \\ f_2(x), & \text{si } x \geq a \end{cases}$. Se indica así que la función que actúa para los valores de $x < a$ es $f_1(x)$, y para los valores de $x \geq a$ es $f_2(x)$.

Idea gráfica de una función. Las funciones de variable real suelen representarse por una línea. Todos los puntos de esa línea corresponden a pares de números relacionados entre sí por la función; para cada punto (x_0, y_0) de la gráfica, y_0 es la imagen de x_0; esto es, $y_0 = f(x_0)$.
Si una función viene dada por la expresión $y = f(x)$, para determinar la imagen de un número x_i basta con hallar el valor de $f(x_i)$. Los sucesivos puntos $(x_i, f(x_i))$ generan la gráfica de *f*.

Consideraciones sobre la gráfica de una función

Al representar o interpretar la una función, aparte de considerar las variables que se relacionan y las escalas de los ejes, conviene señalar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus valores máximos y mínimos, la continuidad, y las posibles simetrías y periodicidades.
Estos conceptos pueden definirse así:

- $f(x)$ es creciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$
- $f(x)$ es decreciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$
- $f(x)$ tiene un máximo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \leq f(a) \geq f(a+h)$
- $f(x)$ tiene un mínimo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \geq f(a) \leq f(a+h)$
- Continuidad. Una función es continua cuando a una variación pequeña de *x* le corresponde una variación pequeña de $f(x)$: una función *f* es continua cuando puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.
- Funciones pares: son simétricas respecto del eje OY; cumplen que $f(-x) = f(x)$.
- Funciones impares: simétricas respecto del origen; cumplen: $f(-x) = -f(x)$
- Funciones periódicas: una función de periodo *k* cumple que $f(x+k) = f(x)$, para todo *x*.
- Tasa de variación media: $TVM[a,b] = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Esta expresión da el aumento o disminución medio (unitario) de la función $f(x)$ cuando la *x* para de valer *a* a valer *b*.
- Tendencias: asíntotas. Las asíntotas de una función son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de esa función. Pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.

Composición de funciones

Cuando sobre $f(x)$ actúa otra función g se puede hablar de composición de funciones. Es frecuente la notación $(g \circ f)(x)$, cuyo significado es $g(f(x))$; se lee f compuesta con g.
Esquemáticamente es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

Análogamente, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
La composición de funciones no es conmutativa; esto, en general $g(f(x)) \neq f(g(x))$

Funciones inversas

Dos funciones f y g son inversas cuando se cumple que: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$.
La función inversa de f se designa por f^{-1}. (También se dice que f y g son recíprocas.)

Imagen inversa de un número

Para todo y_0 del recorrido de la función f, su imagen inversa, $f^{-1}(y_0)$, es el conjunto de los números x, del dominio, que se transforman en y_0. Esto es, $f^{-1}(y_0) = \{x \in \mathrm{R} \mid f(x) = y_0\}$.

- Para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x) = y_0$.
- En particular, $f^{-1}(0)$ da los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

Gráficamente, para determinar $f^{-1}(y_0)$ se traza la recta horizontal $y = y_0$; las abscisas correspondientes a los puntos de corte de esa recta con la gráfica de $f(x)$ forman la imagen inversa de y_0.

Transformaciones de una función

A partir de la función $f(x)$ pueden deducirse el comportamiento de:

$$-f(x), \qquad |f(x)|; \qquad k + f(x); \qquad k \cdot f(x); \qquad f(x+k); \qquad f(k \cdot x)$$

k es un número real.

- La función $-f(x)$ cambia de signo todos los resultados de $f(x)$.

Las gráficas de $f(x)$ y de $-f(x)$ son simétricas respecto del eje OX.

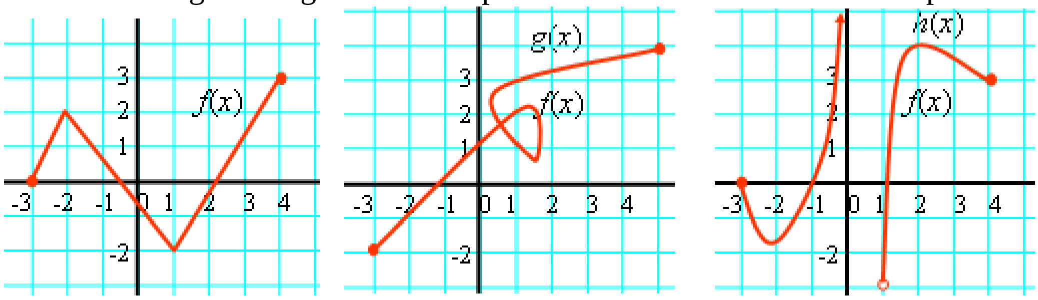
- La función $|f(x)|$ cambia de signo todos los resultados negativos de $f(x)$; los resultados positivos los deja iguales. Su gráfica no puede aparecer por debajo del eje OX.

También puede definirse a trozos. Así: $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$

- La función $k + f(x)$ suma el número k a los resultados de $f(x)$. Esto significa que si k es positivo, la gráfica de $f(x)$ se desplaza k unidades hacia arriba; si k es negativo, se desplaza hacia abajo.
- La función $k \cdot f(x)$ multiplica por k todos los resultados de $f(x)$.
- La función $f(x+k)$ es la misma que $f(x)$ pero trasladada k unidades a la izquierda si k es positivo, y k unidades a la derecha, si k es negativo.
- La función $f(k \cdot x)$ contrae o dilata la función $f(x)$; si k > 1, se contrae; si $0 < k < 1$, se dilata.

Tema 5. FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. Indica cual de las siguientes gráficas corresponde a una función. Justifica la respuesta.



2. Para las funciones anteriores especifica el dominio y recorrido de cada una de ellas.

3. Para las mismas funciones indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y mínimos.

4. Halla el dominio de las funciones:

a) b) $f(x)=\sqrt{2x-4}$ c) $f(x)=\dfrac{5x+1}{4x-2}$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

5. Para cada una de las funciones anteriores calcula: $f(-2)$ $f(0)$, $f(2)$ y $f(4)$. Si en algún caso no puede determinarse su valor, indica el motivo.

6. Para cada una de las siguientes funciones calcula: $f(-2)$ $f(0)$, $f(2)$ y $f(4)$. Si en algún caso no puede determinarse su valor, indica el motivo.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{si } x<0 \\ x-1, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 1/x, & \text{si } x<0 \\ 1/(x-2), & \text{si } x>0 \end{cases}$

7. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & \text{si } x<1 \\ x-1, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$.

8. Observando la gráfica del ejercicio anterior contesta:

a) ¿Es una función continua?
b) ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x)=2$?

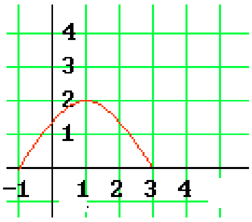
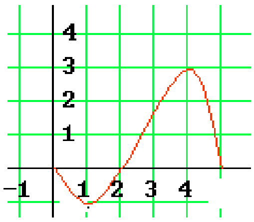
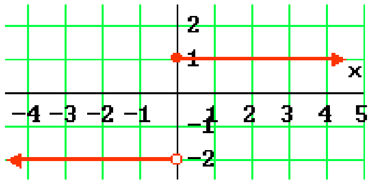
9. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se dan:

a) $f(x)=2x-1$ en [0, 3] b) $g(x)=\dfrac{6}{x}$ en [1, 6]

TEMA 5 FUNCIONES (Pendientes de Matemáticas CCSS I)

Tipo I. Funciones. Dominio y recorrido

1. Halla el dominio y recorrido de las funciones cuya gráfica se da a continuación:

[sol] a) [–1, 3]; [0, 2]. b) [0, 5]; [–1, 3] c) R; {–1, 1}

2. Indica cuáles de las siguientes relaciones definen una función:

a) A cada número le asignamos el doble.
b) A cada alumna le asignamos su estatura.
c) A cada número natural le asignamos sus múltiplos.
d) A cada ciudad le asignamos la provincia a la que pertenece.

[sol] a) Sí. b) En cada momento sí. c) No. d) Sí.

3. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^{10} + 5x^6 - 18$ b) $g(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-25}$ c) $h(x) = \sqrt{3x-4}$

d) $k(x) = \sqrt{x^2-1}$ e) $l(x) = \dfrac{8x-9}{2x^2-3x+1}$

[sol] a) R b) R – {–5, 5} c) $\left[\dfrac{4}{3},\infty\right)$ d) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ e) $R - \left\{\dfrac{1}{2},1\right\}$

Tipo II. Representación y características gráficas

4. [S] Álvaro va cada tarde al instituto; pasa primero por la panadería y compra un bollo, luego se detiene en la siguiente esquina a esperar a un compañero. Por fin, después de las clases, vuelve a casa. Aquí tienes la gráfica de su recorrido.

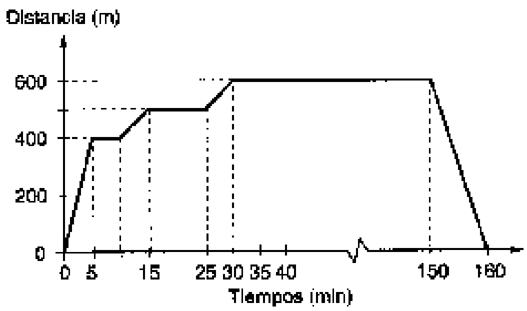


Figure 6.40

a) ¿Qué distancia hay de la casa al instituto? ¿Y a la panadería?
b) ¿Cuánto tarda en comprarse el bollo?
c) ¿Tiene que esperar mucho a su compañero?
d) ¿Cuánto duran las clases?
e) Si las clases comienzan a las 4 de la tarde, ¿dónde estaba a las 15 h 32 min, 15 h 36 min y a las 15 h 54 min?
f) ¿Lleva la misma velocidad a la ida que a la vuelta?
g) Estudia la velocidad en cada trayecto.

[sol] a) 600 m, 400 m. b) 5 min. c) 10 min. d) 2 h. f) Va tres veces más rápido a la vuelta. g) Por trayectos: 80, 0 (panadería), 20, 0 (espera), 20, 0 (clase) y 60 m/min.

5. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - x^2$ b) $g(x) = x^3 - x + 1$ c) $h(x) = -\dfrac{x}{x^2+4}$

[sol] a) Par b) no es par ni impar. c) Impar.

6. Dada la función, definida a trozos, $f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{si } x<-3 \\ 0, & \text{si } -3\leq x<0 \\ x^2-1, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

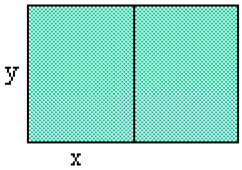
a) Halla f(–4), f(–2), f(–1), f(0) y f(2). b) Representa f(x).
c) Da los valores de x que se transforman en 0. Ídem en –1.
[sol] a) –1; 0; 0; –1; 3. c) $[-3,0)\cup\{1\}$; {–4, 0}

7. Calcula algunos pares de la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ 3x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$, represéntalos en un diagrama cartesiano y traza, uniendo los puntos, la gráfica de *f*(x). ¿Para que valores de x la función toma el valor 9? [sol] $f^{-1}(9)=\{-3, 3\}$

Tipo III. Funciones dadas por enunciados

8. La factura bimensual de una compañía telefónica consta de una cantidad fija (las cuotas de abono) por un importe de 29,84 euros, más el importe de los pasos gastados, con un precio por paso de 0,06 euros. A esa suma hay que cargarle el 16% de IVA. Se pide:
a) ¿Cuánto debe pagar una familia que consumió en dos meses 990 pasos?
b) Escribe la expresión que dé el importe total, IVA incluido, de la factura en función de los pasos gastados.
[sol] a) 103,52 € b) I(p) = 34,6144 + 0,0696p.

9. Se desea cercar con cuerda dos parcelas rectangulares adyacentes (consecutivas) e iguales que encierren entre las dos un área de 1.000 m².



a) Si x indica el ancho de las parcelas, encuentra la función que da la longitud L(x) de cuerda necesaria para cercarlas.
b) Representa L(x), y a partir de esa gráfica determina, aproximadamente, el mínimo necesario de cuerda para cercar las dos parcelas. (Puede convenirte hacer una ampliación de la gráfica desde x = 15 hasta x = 25).
[sol] a) $L(x) = 4x + \dfrac{1.500}{x}$

10. Se quiere construir una caja partiendo de un trozo de cartulina rectangular de 24 por 32 cm, recortando un cuadradito en cada esquina y doblando.
a) Determina la función que da el volumen de la caja dependiendo del lado del cuadrado cortado.
b) ¿Qué volumen tendrá la caja cuando cortamos 0, 5 y 10 cm?
c) Representa dicha función. A partir de su gráfica, determina su dominio, recorrido y máximo.
[sol] a) V(x) = (32 – 2x) · (24 – 2x) · x b) 0; 1.540; 480

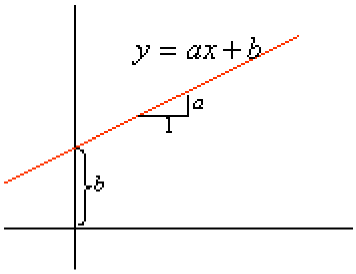
Funciones polinómicas. La expresión general de una función polinómica es

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Es la misma que la de un polinomio. Los números a_i son los coeficientes y n indica el grado, que debe ser un número entero positivo. La indeterminada x es la variable independiente. Su dominio es **R**; esto es, siempre están definidas. El valor de f(x) dependerá del que tome x.

- La función polinómica de grado cero, $f(x) = a_0$ o $y = k$, es la función constante. Se representa mediante una recta horizontal.
- La función lineal es la de grado uno. Su expresión es:

$$f(x) = ax + b \Leftrightarrow y = ax + b$$



Su representación gráfica es una recta. Para trazarla basta con conocer dos de sus puntos.
El coeficiente a se llama pendiente, y mide lo que varía la y por cada aumento unitario de x.
Al número b se le llama ordenada en el origen, pues indica el valor de y cuando x vale 0.

Recta que pasa por dos puntos
Una recta queda determinada por dos puntos. Si los puntos son $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, al ser de la recta $y = ax + b$, deberán cumplir su ecuación. Luego:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

La solución de este sistema nos proporciona los valores de a y b.

Rectas que pasan por el origen. Su expresión general es: $y = ax$.
Estas funciones se llaman de proporcionalidad directa: el coeficiente a indica la razón de proporcionalidad entre las variables x e y.
Si $a = 1$, la función se llama identidad: $y = x$.

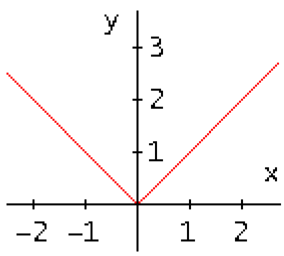
Rectas horizontales y verticales
- La expresión general de una recta horizontal es $y = b$. Recibe el nombre de función constante.
- La ecuación de una recta vertical es de la forma $x = k$.

Esta expresión no define una función: al valor $x = k$ le corresponden infinitos valores de y.

- La ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es la ecuación general de una recta, en su forma implícita.

- La función valor absoluto de x se escribe así:

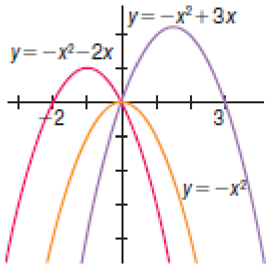
$$f(x) = |x| \Leftrightarrow y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



- La parte entera de x, que escribimos $f(x) = ENT[x]$, es la función que asigna a cada número real x el número entero menor o igual que x. Es una función escalonada.

La función cuadrática: parábolas.
Su expresión analítica es: $f(x)=ax^2+bx+c \Leftrightarrow y=ax^2+bx+c$, con $a \neq 0$
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.

Efecto de los parámetros *a, b* y *c*
La parábola $y=ax^2+bx+c$ queda totalmente definida cuando se conocen *a*, *b* y *c*.
Coeficiente *a*:



- Si $a > 0$ la parábola es cóncava (∪). Su vértice está en el mínimo de la función.
- Si $a < 0$, es convexa (∩). El vértice es el máximo.
- La abscisa del vértice es $x=-\dfrac{b}{2a}$; su ordenada, el valor de *y* correspondiente.

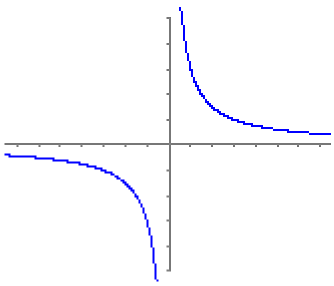
Coeficiente *b*. El coeficiente *b* produce un desplazamiento lateral en la parábola.
Término independiente *c*. El término *c* produce desplazamientos verticales en la parábola.

Funciones racionales. Son de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

- Su dominio de definición son todos los números reales, salvo aquellos que anulan el denominador. Luego no están definidas en los números que son solución de $Q(x) = 0$.

Tienen asíntotas: verticales, en las raíces del denominador que no lo sean (a la vez) del numerador; horizontales, si el grado de $Q(x)$ es mayor que el de $P(x)$; y oblicuas, cuando el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el de $Q(x)$.

Función de proporcionalidad inversa. Su expresión general es $f(x)=\dfrac{k}{x}$ o $y=\dfrac{k}{x}$,
donde *k* es una constante distinta de cero.



Cuando decimos que dos magnitudes *x* e *y* son inversamente proporcionales, queremos indicar que en la misma proporción que aumenta el *y*, disminuye *x*, y viceversa. Así, si *x* se hace el doble, *y* se convierte en la mitad; por eso, su producto es constante, $yx=k$, donde k es la constante de proporcionalidad.
Observa que $y=\dfrac{k}{x} \Leftrightarrow yx=k$.
La regla de tres simple inversa se ajusta a esta relación.
La representación gráfica de esta función es una hipérbola equilátera. Los ejes de coordenadas son asíntotas de esta curva.

Funciones radicales. Son de la forma $y=\sqrt[n]{f(x)}$, siendo *f*(x) cualquier otra función.

- Dominio: Estas funciones están definidas cuando está definida *f*(*x*) y además puede hacerse la raíz. Así, si *n* es par (caso de raíces cuadradas: $y=\sqrt{f(x)}$), será necesario que $f(x)\geq 0$; si *n* es impar, basta con que *f*(*x*) esté definida.

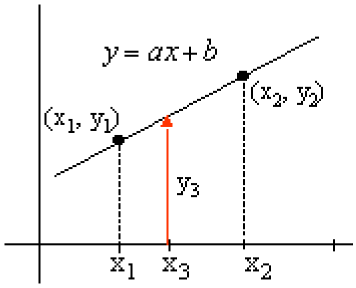
Función de interpolación. Interpolación lineal y cuadrática

Se llama función de interpolación a la función que se ajusta a una serie de puntos dados.

Interpolación lineal. Cuando se conocen sólo dos puntos, el polinomio interpolador es la función $f(x) = ax + b$, que es una recta. Para determinarla hay que hallar a y b.

Si los puntos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, los valores de a y b se hallan resolviendo el sistema: $\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$

El valor de interpolación correspondiente a x_3 se calcula sustituyendo en ecuación hallada, siendo $y_3 = ax_3 + b$.

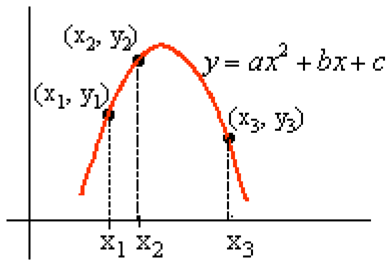


Interpolación cuadrática

Cuando se conocen tres pares de puntos no alineados, el polinomio interpolador es la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, que es una parábola.

Si los puntos son $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$, los valores de a, b y c se hallan resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}.$$

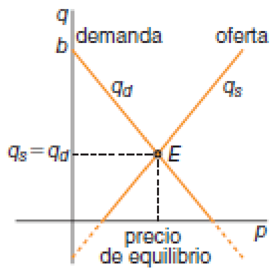


Una aplicación a la economía: Funciones de oferta y demanda

- La función de demanda, q_d, para un producto es aquella que determina la cantidad total que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio p
- La función de oferta, q_s, es la que determina la cantidad total que los fabricantes están dispuestos a producir a un precio de venta p.
- Cantidad de equilibrio es el número de unidades que hay que producir para que la demanda y la oferta se igualen: que se venda todo lo producido. Esto es, cuando $q_d = q_s$. El valor de p correspondiente se llama precio de equilibrio.

Modelos de oferta y demanda. Modelo lineal

- La demanda viene dada por la recta $q_d = b - ap$, con a y $b > 0$; (la pendiente negativa indica que cuando el precio p aumenta las ventas disminuyen).
- La oferta se expresa por $q_s = c + dp$, con $d > 0$, para indicar que si el precio aumenta la producción también lo hace. El término c suele ser negativo.



En los dos casos la variable independiente es p, y su dominio está definido para valores de $p > 0$ que hagan a q_s y q_d positivas y enteras (en la práctica no pueden venderse trozos de un producto).

Modelo cuadrático. La demanda se ajusta a la función $q_d = -ap^2 + bp + c$, con $a > 0$.

La oferta puede ajustarse por otra función cuadrática, $q_s = a'p^2 + b'p + c'$ con $a' > 0$.

La primera parábola tiene el vértice en el máximo; la segunda, en el mínimo.

Como en el modelo lineal, p, q_s y q_d deben ser positivos.

- También pueden darse modelos mixtos: con la función de oferta lineal y la de demanda cuadrática; o viceversa.

FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES (Pendientes de Matemáticas CCSS I)

Tipo I. Funciones lineales

1. Representa gráficamente las siguientes rectas:

a) y = x – 4 b) y = 0,8x c) y = –0,4x – 4 d) $y = \frac{3}{2}x - 4$

2. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A = (–1, 3) y B(5, –2)

[sol] $y = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6}$.

3. Un coche cuesta 25.000 euros y se deprecia al mes 150 euros. ¿Cuál es su valor dependiendo del número de meses desde su compra? [sol] f(x) = 25000 – 150x

4. La factura bimensual de una compañía telefónica consta de una cantidad fija (las cuotas de abono) por un importe de 30,60 €, más el consumo, con un precio por minuto de 0,12 €.

a) ¿Cuánto debe pagar una familia que consumió en dos meses 215 minutos?
b) Halla la expresión que dé el importe total de la factura en función de los minutos consumidos.
c) Si a esa suma hay que cargarle el 16% de IVA, ¿cuál es la función que da el importe total (IVA incluido) de la factura dependiendo de los minutos consumidos?

[sol] a) 56,4 € b) f(x) = 30,60 + 0,12x c) I(x) = 35,496 + 0,1392x

5. La fuerza de la gravedad en la Tierra vale 9,81 y en Venus 8,85.

a) ¿Cuánto pesaría Antonio en la Tierra si su peso en Venus es de 80?
b) Escribe las funciones de conversión de pesos de un planeta a otro.

[sol] a) 88,678 kg b) f(x) = 1,108x; g(z) = 0,9z

6. Representa las siguientes funciones:

a) $y = |x + 1|$ b) $y = |2x - 2|$

7. Representa gráficamente:

a) y = ENT [0,4x] b) y = ENT [2x]

Tipo II. Funciones cuadráticas

8. Representa gráficamente las siguientes parábolas, calculando previamente su vértice:

a) $y = x^2 - 4x + 5$ b) $y = -x^2 + 6x - 6$ c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$

[sol] a) (2, 1) b) (3, 3) c) (1, 1/2)

9. Representa gráficamente la recta y = x + 1 y la parábola $y = x^2 - 5x + 4$.

a) Determina analíticamente sus puntos de corte.
b) Da una recta que no corte a la parábola. Justifícalo.

[sol] a) (5,45, 6,45) y (0,55, 1,55)

10. Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las parábolas:

a) $y = x^2 - 5x$; b) $y = x^2 + x + 4$; c) $y = -x^2 + 4$

[sol] a) (0, 0) y (5, 0) b) (0, 4) d) (0, 4), (–2, 0) y (2, 0).

Tipo III. Interpolación

11. Halla, por interpolación lineal, el valor de m.

x	2	4	5
y	1,1	m	3,2

[sol] 2,5

12. Calcula por interpolación lineal a trozos, los valores correspondientes a n_1, n_2 y n_3 en la siguiente la tabla:

z	0,00	0,01	0,02	0,03
1,0	0,8413	0,8438	n_1	0,8485
1,1	0,8643	n_2	0,8686	n_3

[sol] n_1 = 0,84615; n_2 =0,86645; n_3 = 0,87075.

Tipo IV. Aplicaciones económicas

13. Las funciones de oferta y demanda de un producto son: $q_s = -5 + 2p$; $q_d = 210 - 0,4p^2$, donde p viene dado en euros y q en miles de unidades. Halla:

a) Las cantidades de oferta y demanda a un precio de 8 euros.
b) El precio y la cantidad de equilibrio para ese producto.

[sol] a) 11.000; 184.400 b) 20,82 €; 36.640 unidades.

14. Halla el precio de equilibrio (en euros) y el número de unidades ofertadas y demandadas a ese precio, para las siguientes funciones de oferta y demanda:

a) $q_s = -70 + 2p$ y $q_d = 200 - p$ b) $q_s = -40 + p$ y $q_d = 500 - 2p$

[sol] a) 90 €; 110 b) 180 €; 140

15. Una empresa puede vender cierto producto a 9 € la unidad. Los costes de funcionamiento de la empresa son de 3.500 € y el coste de producción por unidad de producto es de 3,50 €.

a) ¿Cuántas piezas deben producirse y venderse para que los costes se igualen a los ingresos?
b) ¿Cuánto pierde si fabrica y vende 400 unidades?
c) ¿Cuánto gana o pierde si fabrica 1.000 unidades y sólo vende 700?

[sol] a) 636,36 b) 1300 €. c) Pierde 700 €.

Tipo V. Otras funciones

16. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+5}$ b) $g(x) = \dfrac{x-1}{2x-6}$ c) $h(x) = \dfrac{6}{x^2 - 2x}$

[sol] a) **R** – {5} b) **R** – {3} c) **R** – {0, 2}

17. Para las funciones anteriores:

a) ¿Qué sucede en los puntos que anulan los respectivos denominadores?
b) ¿Qué sucede con los respectivos valores de la función cuando la x toma valores muy grandes, pongamos x > 100; o muy negativos: x < –100?

[sol] a) Hay asíntotas verticales. b) *f* se acerca a 1; *g* se acerca a 0,5; *h* se acerca a 0.

18. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$ b) $g(x) = \sqrt{2x+3}$ c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

[sol] a) [-3, +∞) b) [-3/2, +∞) c) (-∞, -3]∪[0, +∞)

Idea de limite de una función

Tendencias

Decir que x tiende a a ($x \to a$) significa que x toma valores próximos a a, menores o mayores que a.

Decir que $f(x)$ tiende a l ($f(x) \to l$) significa que $f(x)$ toma valores próximos a l, menores o mayores que l, pero cercanos.

Ejemplo. Dando valores a x se ve que si $x \to 1$, entonces $f(x)=\frac{1}{x} \to 1$. Esto es: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$.

- En general, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, significa que cuando x se acerca a a, (tan cerca como sea necesario), el valor de $f(x)$ se acerca a l (tan cerca como se desee).

El comportamiento de $f(x)$ debe ser el mismo tanto si x se acerca a a por la izquierda ($x \to a^-$), como si x se acerca a a por la derecha ($x \to a^+$).

Los límites laterales deben ser iguales: si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

La definición precisa de límite de una función en un punto es la siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \ \big|\ \forall x, 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

Algunas propiedades de las operaciones con límites

En relación con las operaciones elementales, los límites cumplen las siguientes propiedades.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, con A y B finitos, entonces:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)=A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}$, (B $\neq$ 0)

4) Si $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)}=A^B$

5) Si $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(\log_b f(x)\right)=\log_b\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)=\log_b A$

1) El límite de una suma es igual a la suma de los límites.
2) El límite de un producto es igual al producto de los límites.
3) El límite de un cociente es igual al cociente de los límites.
4) El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites.
5) El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite.

Estas propiedades se aplican en ambos sentidos (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), según convenga.

¿Cómo se hacen los límites?

En la práctica, la mayoría de los límites se hacen aplicando las propiedades anteriores.

- Si $f(x)$ es una función usual (polinómicas, racionales, logarítmicas, etc) y está definida en el punto $x = a$, *suele cumplirse* que: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Esto es: para calcular el límite se sustituye en la función el valor al que tiende la x.

Ejemplo: a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x=2^0=1$ c) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=3\cdot 2+1=7$.

- Si la función no estuviese definidaza en el punto habrá que recurrir a otras técnicas.

- Si $f(x)$ no está definida en el punto $x = a$, pueden darse tres posibilidades:
    1) Que no tenga sentido calcular el límite.
    2) Que no exista el límite.
    3) Que exista el límite (aunque deberá calcularse por métodos específicos)

Ejemplos:

1) $\underset{x\to 1}{lím}(\ln(x^2-2))$ no existe. La función no está definida para valores cercanos a 1.

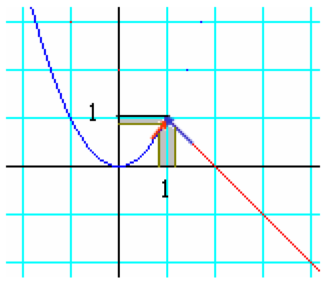
2) Para $f(x)=\frac{1}{x-1}$, no existe $\underset{x\to 1}{lím}\frac{1}{x-1}$, pues $\underset{x\to 1^-}{lím}\frac{1}{x-1}=-\infty$ y $\underset{x\to 1^+}{lím}\frac{1}{x-1}=+\infty$

3) Para $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$, aunque la función no está definida en $x = 1$, $\underset{x\to 1}{lím}=\frac{x-1}{x^2-1}=0{,}5$.

<u>Para las funciones definidas a trozos,</u> además de lo anterior, hay que estudiar los límites laterales en los puntos de unión de los diferentes trozos.

Ejemplo:

Para estudiar el límite de la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x<1 \\ 2-x, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ en el punto x = 1 es necesario considerar los límites laterales.



Por la izquierda: $\underset{x\to 1^-}{lím}\ f(x)=\underset{x\to 1^-}{lím}\ x^2=1$

Por la derecha: $\underset{x\to 1^+}{lím}\ f(x)=\underset{x\to 1^+}{lím}(2-x)=1$

Como ambos límites coinciden, existe el límite y vale 0.

<u>Límites de funciones racionales cuando $x \to a$. Indeterminación 0/0</u>

<u>Caso 1.</u> Si $Q(a) \neq 0 \Rightarrow \underset{x\to a}{lím}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$

<u>Caso 2.</u> Si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0 \Rightarrow$ no existe el límite. Se escribe $\underset{x\to a}{lím}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)\neq 0}{Q(a)=0}=\infty$.

<u>Caso 3.</u> Si $Q(a) = 0$ y $P(a) = 0$, se verifica que $P(x)=(x-a)P_1(x)$ y $Q(x)=(x-a)Q_1(x)$, de donde $\underset{x\to a}{lím}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\underset{x\to a}{lím}\frac{\cancel{(x-a)}P_1(x)}{\cancel{(x-a)}Q_1(x)}=\underset{x\to a}{lím}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

Ejemplo: $\underset{x\to 2}{lím}\frac{x-2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\underset{x\to 2}{lím}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\underset{x\to 2}{lím}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

<u>La indeterminación 0/0 en funciones con raíces</u>, puede resolverse de dos formas:
1. Descomponiendo en factores y simplificando, como para las funciones racionales.
2. Multiplicando y dividiendo la función dada por la expresión conjugada de alguno de sus términos. A continuación se opera y simplifica.

Ejemplo:

$$\underset{x\to 1}{lím}\frac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\underset{x\to 1}{lím}\frac{(2\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+2)}{(x^2-1)(2\sqrt{x}+2)}=\underset{x\to 1}{lím}\frac{4(x-1)}{(x-1)(x+1)(2\sqrt{x}+2)}=\underset{x\to 1}{lím}\frac{4}{2\sqrt{x}+2}=1$$

<u>Operaciones con el infinito</u>

$\infty + \infty = \infty$;	$-\infty - \infty = -\infty$;	$[\infty - \infty]$ (¿)	$\infty \pm k = \infty$;	$-\infty \pm k = -\infty$;
$(+k)\cdot\infty = \infty$;	$(-k)\cdot\infty = -\infty$;	$\infty\cdot\infty = \infty$;	$\infty\cdot(-\infty) = -\infty$;	
$\infty / (\pm k) = \pm\infty$;	$\pm k / \infty = 0$;	$\infty^{(+k)} = \infty$;	$\infty^{(-k)} = 0$;	$[\infty/\infty]$ (¿)

Límite de funciones polinómicas en el infinito

Si $P(x)$ es un polinomio de cualquier grado, se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$.

Si $Q(x)$ es un polinomio de cualquier grado, se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{Q(x)} = 0$.

Si grado de $P(x)$ > grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Si grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n los coeficientes principales.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x^2-4x+1} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1} = \frac{2}{5}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{2x+7} = \infty$

Comportamiento de otras funciones en el infinito

El límite cuando $x \to \infty$ de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se calcula como sigue.

- Funciones exponenciales: $\lim\limits_{x\to\infty} a^{g(x)} = à^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$

Ejemplos: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2} = e^{+\infty} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{3x} = 2^{-\infty} = 0$.

- Funciones logarítmicas: $\lim\limits_{x\to\infty} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log\left(\frac{10x}{x+5}\right) = \log\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10x}{x+5}\right) = \log 10 = 1$

- Funciones trigonométricas:

En ningún caso existen los límites en el infinito. Esto es: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} senx$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} tagx$ no existen. Para funciones compuestas hay que determinarlo en cada caso.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{senx}{x^2+x+1} = 0$, pues $-1 \le$ sen x ≤ 1. b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\cos^2 x$ no existe, pues $0 \le \cos^2 x \le 1$.

- Funciones con raíces. En la medida de lo posible −salvando los intervalos de definición− se aplican las técnicas anteriores. Por ejemplo, si hay cocientes, resulta válida la comparación de grados.

Ejemplos: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \infty$.

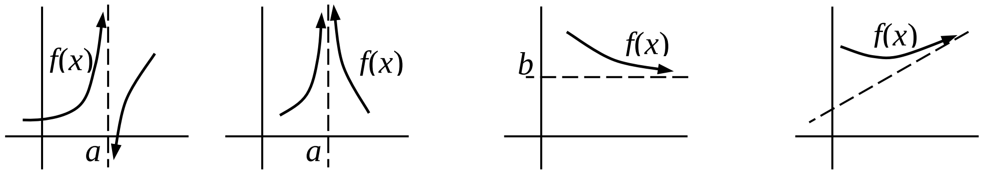
La indeterminación de la forma $\infty - \infty$. El procedimiento general consiste en operar la expresión inicial hasta transfórmala en otra forma indeterminada del tipo 0/0 0 ∞/ ∞.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to3} \left(\frac{2x}{x-3} - \frac{x^2+1}{x^2-9}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to3} \left(\frac{(2x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right) =$

$$= \lim\limits_{x\to3} \left(\frac{2x^2+3x-9}{x^2-9} - \frac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right) = \lim\limits_{x\to3} \left(\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Aplicación del cálculo de límites a la determinación de las asíntotas de una función racional

- Las asíntotas son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de una función. Pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.



Asíntotas verticales   Asíntota horizontal   Asíntota oblicua

- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
- La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.
- La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \ (m \neq 0 \text{ y } m \neq \infty); \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = n \ (n \neq \infty).$$

- **Asíntotas de funciones racionales.**

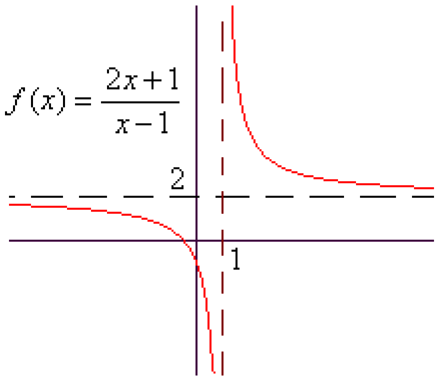
Las funciones racionales, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$:

– *pueden* tener asíntotas verticales en las raíces del denominador: las soluciones de Q(x) = 0.
– tienen asíntotas horizontales si el grado de P(x) es menor o igual que el grado de Q(x).
– tienen asíntotas oblicuas si el grado de P(x) = 1 + grado Q(x)..

Se determinan aplicando los procedimientos indicados más arriba.

Ejemplos:

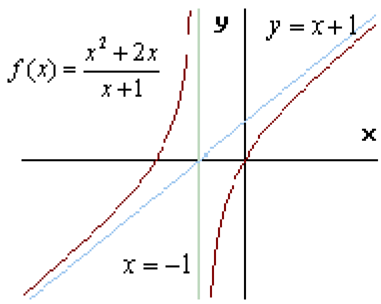
a) La función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tiene una asíntota vertical (la recta x = 1) y otra horizontal (la recta y = 2).



En efecto: $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{3}{0} = \infty \Rightarrow x = 1$ es una AV.

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2$ es una asíntota horizontal.

b) La función $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$ tiene dos asíntotas, una vertical (la recta x = –1) y otra oblicua, la recta $y = mx + n$, siendo:



$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2+x} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x+1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

La asíntota es la recta $y = x + 1$.

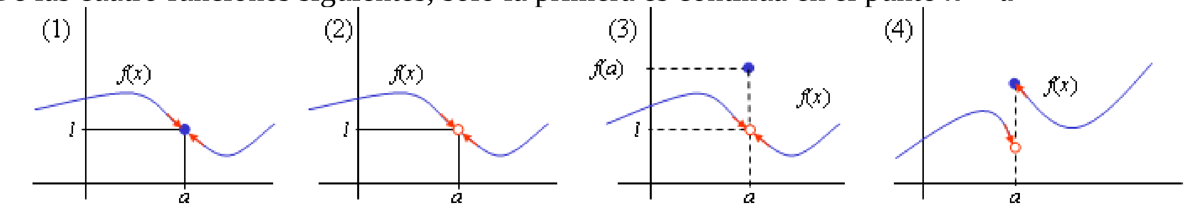
Tema 7 (II). CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Definición: $f(x)$ es continua en el punto $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Esto implica que:

1. La función $f(x)$ está definida en el punto $x = a$. Esto es, se sabe cuánto vale $f(a)$
2. Existe el límite en $x = a$: existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
3. El valor del límite coincide con $f(a)$. Esto es, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l = f(a)$

De las cuatro funciones siguientes, sólo la primera es continua en el punto $x = a$



$f(x)$ es continua en $x = a$

$f(x)$ es no continua en $x = a$: $f(a)$ no está definido

$f(x)$ es no continua en $x = a$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

$f(x)$ es no continua en $x = a$: no existe el límite en $x = a$

Discontinuidad evitable

Cuando una función no es continua de dice que es discontinua. La causa más común de la discontinuidad está en que la función no esté definida en un punto. Así, por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-1)}$ es discontinua en $x = -2$ y en $x = 1$.

Hay casos en los que la discontinuidad es evitable. Así sucede para las funciones dadas en las gráficas (2) y (3).

- Una función $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en el punto $x = a$ cuando tiene límite en ese punto.

En el caso (2) la discontinuidad se evita definiendo $f(a) = l$.

En el caso (3) la discontinuidad de evita (imponiendo) redefiniendo $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

En el caso (4) la discontinuidad no puede evitarse: la gráfica da un *salto* en el punto $x = a$.

Continuidad lateral

La función representada en la grafica (4) puede considerarse continua por la derecha del punto $x = a$. En cambio, no es continua a su izquierda.

Una función $f(x)$ es continua por la derecha en el punto $x = a$ (en a^+) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Una función $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto $x = a$ (en a^-) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim\limits_{x \to a^{-+}} f(x) = f(a)$

Ejemplo: La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, pues en esos dos puntos no está definida. Si hacemos los límites en esos puntos, se tiene:

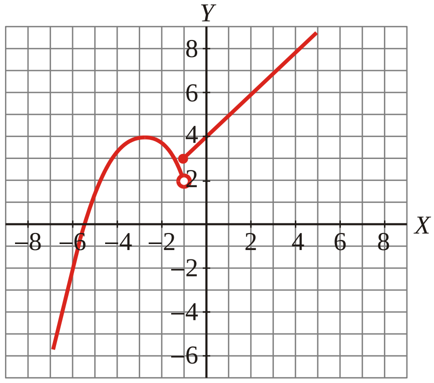
$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \infty \,; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\,;$$

En el primer caso, en $x = -1$, no existe límite; por tanto, la discontinuidad no puede evitarse.

En cambio, en $x = 1$ sí puede evitarse. Se evita definiendo $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

TEMA 7.-Límites de funciones, continuidad y ramas infinitas

1. A partir de la gráfica de *f(x)*, calcula



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

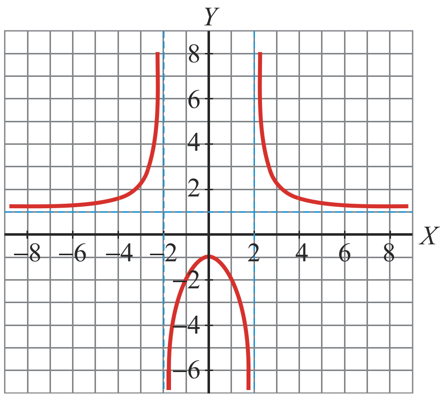
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

2. Sobre la gráfica de *f(x)*, halla :



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-6}{x^2-5x+6}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{5x-2}{4x+3}\right)^{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-5x+6}\right)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{2-x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+3x^2+5x}{x^2+5x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x-3}{2x-5}\right)^{\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}}$ **h)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{3x-1}\right)^{\frac{4x+1}{x}}$ **i)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2} - \dfrac{x^4+x+1}{x^3+x}\right)$

j) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$ **k)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-2x}$ **l)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

m) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^3-4x^2+4x-3}$ **n)** $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2+x-42}{x-6}$ **ñ)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}$

o) $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{4x-2}{x-3}\right)^{\frac{1}{x}}$ **p)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{10x-3}{5x+3}\right)^{\frac{-x^2+3}{2x}}$ **q)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$

r) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{16-x^2}{x-4}$ **s)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2-6x^3+8x^4}{6-9x^4+6x^2}$ **t)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$

u) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^3+2}{3x^5+8x-1}$ **v)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$ **w)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+7x-5}}{\sqrt[3]{8x^3-8x}}$

x) $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{8-\sqrt{x^2+15}}{x-7}$ **y)** $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$ **z)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\to+\infty\\x\to-\infty}} \dfrac{2x^3+6x^2-3x}{2x^2+5x}$

4. Dada $f(x)=\begin{cases} 2x+3 \text{ si } x\le -1 \\ x^2+1 \text{ si } -1<x\le 2 \\ \dfrac{x+3}{3-x} \text{ si } 2<x \end{cases}$, **a)** Estudia su continuidad.

b) Calcula: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $1(x)=4x^2-2x+12$ **b)** $f(x)=\dfrac{8}{x-2}$

c) $g(x)=\sqrt{x-3}$ **d)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-3} & \text{si } x>3 \\ 3x & \text{si } x\le 3 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x+3 & si\ x\neq 2 \\ x^2+1 & si\ x=2 \end{cases}$ **f)** $f(x)=\begin{cases} |x-3| & si\ x\neq 3 \\ 2 & si\ x=3 \end{cases}$

g) $g(x)=\begin{cases} 3+x & si\ x\neq 1 \\ 3-x & si\ x=1 \end{cases}$ **h)** $h(t)=\begin{cases} \dfrac{t^3-8}{t-2} & si\ t\neq 2 \\ 12 & si\ t=2 \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x^3+1} & \text{si } x\neq -1 \\ -\dfrac{4}{3} & \text{si } x=-1 \end{cases}$ **j)** $g(x)=\dfrac{4}{(x+3)^2}$

k) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} & si\ x<2 \\ 3 & si\ x=2 \\ \dfrac{x^2-x-2}{3x-6} & si\ x>2 \end{cases}$ **l)** $f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ x\le 1 \\ x^2-1 & si\ 1<x<2 \\ x^2 & si\ x\ge 2 \end{cases}$

6. Halla *a*para que las siguiente función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{a}{x+1} & \text{si } x>1 \end{cases}$ sea continua para todo valor de x.

7. Halla *a* para que las siguiente función $f(x)=\begin{cases} ax-2 & si & x\le 1 \\ 4x-2a & si & x>1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$

8. Halla el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & si \quad x\geq 1 \\ 4x-k & si \quad x<1 \end{cases}$ sea continua en x = 1. ¿Puede ser discontinua en otro punto?

9. Determinar las asíntotas y las ramas infinitas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

g) $f(x)=(x-1)e^{-x}$

10. En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t)=\frac{30t}{t+4}, t\ en\ días.$

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?
b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de unmes.
c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

11. La siguiente función representa el importe a pagar (€) por peso de paquete (kg) de un servicio de mensajería. Halla los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x, & six\leq 4 \\ \dfrac{1}{x-4}, & six>4 \end{cases}$$

Representa la función en un entorno de $x=4$

12. Los gastos de una empresa dependen de sus ingresos, x. Así:

$$g(x)=\begin{cases} 0{,}6x+200 & si \quad 0\leq x\leq 1000 \\ \dfrac{1000x}{x+250} & si \quad x>1000 \end{cases}$$

donde los ingresos y los gastos vienen expresados en euros.

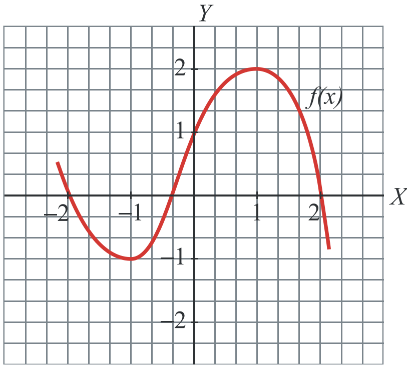
a) Representa g(x) y di si es función continua.
b) Calcula el límite de g(x) cuando x tiende a +∞, y explica su significado.

TEMA 8.- Iniciación al cálculo de derivadas. Aplicaciones

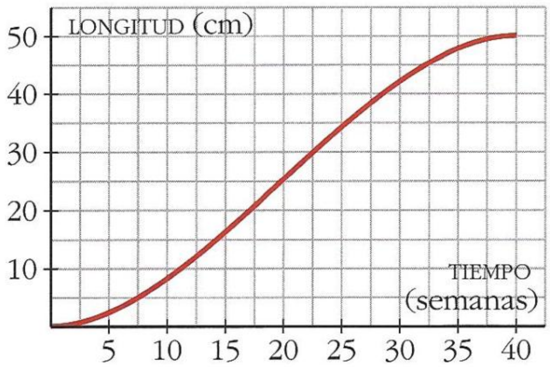
1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA:

a) Dada la función $f(x) = (x-1)^2$, calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

b) Calcula la tasa de variación media de esta función, f(x), en los intervalos [-1, 0] y [1, 2] e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:

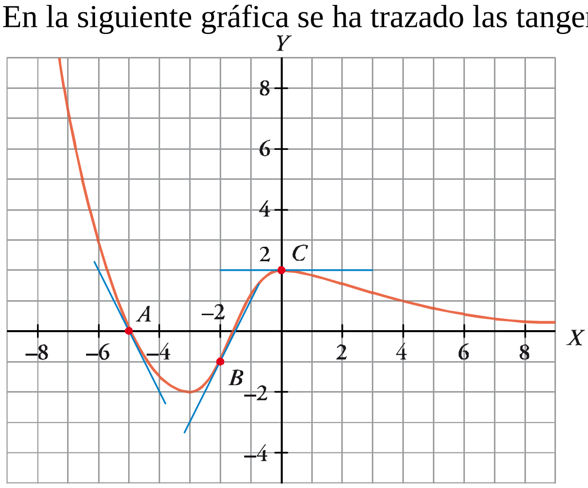


c) En la gráfica adjunta se muestra la longitud del feto durante el embarazo. Es una función creciente, sin embargo, la rapidez de crecimiento no es la misma en todo el embarazo. **Estudia** el crecimiento medio en los intervalos $[0, 10]$ y $[10, 20]$, y **di** en qué periodo crece más rápidamente.



2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. (TV INSTANTÁNEA)

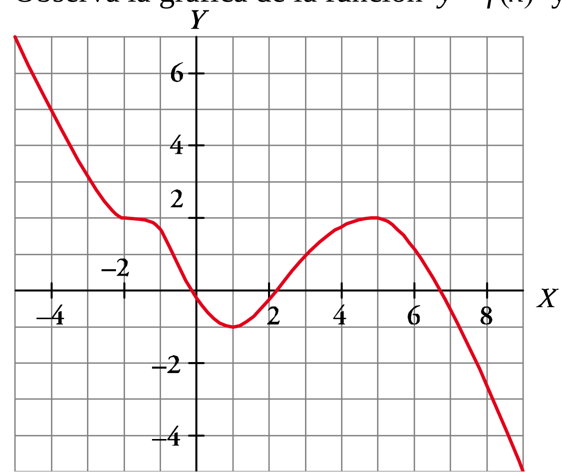
a) En la siguiente gráfica se ha trazado las tangentes en los puntos A, B y C.



- Halla sus pendiente y di el valor de $f'(-5)$, $f'(-2)$ y $f'(-0)$.

- Di para que valores de x la derivada es positiva.

b) Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde:



- ¿En qué puntos la derivada vale 0?

- ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

- La recta tangente en el punto de abscisa $x =$ 3 es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. ¿Cuántos vale $f'(3)$?

c) Utilizando la definición de derivada

- Calcula $f'(-1)$ siendo $f(x) = \frac{3x+1}{2}$
- Dada la función $f(x) = x^2 - 3x$, calcula $\boldsymbol{f'(-2)}$

3. Calcula las funciones derivadas y simplifica cuando se pueda:

a) $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$

b) $y = \left(x^2 + 2x\right)^3$

c) $f(x) = = e^{7x^4-3}$

d) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

e) $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

f) $y = \sqrt{4x^3+1}$

g) $y = \dfrac{5}{2x^2-7x}$

h) $y = -e^{-x+3}$

i) $y = \ln\left(3x^4 - 2x\right)$

j) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{4}{x^5}$

k) $y = \sqrt{e^x}$

l) $y = e^{\sqrt{x}}$

m) $y = \left(4x^2-2\right)\sqrt{4x-2}$

n) $y = \sqrt{(1+5x)^3}$

o) $y = \ln\left(x^2+3x\right)^3$

p) $y = 3^{2x-x^2}$

q) $y = \log(x^3-5x)^7$

r) $y = \ln\left(\dfrac{xe^x}{1+e^x}\right)$

4. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x)=x^3+5x^2-8x+2$ la recta tangente es paralela a la recta $y=5-8x$?

5. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el punto $x = 2$.

6. Calcula la ecuación de la recta tangente a $y=\sqrt{x+1}$ en el punto $x=0$.

7. Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

8. Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$, calcula las rectas tangentes a la misma, que sean paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

9. El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$, el coste medio por unidad es $M(q) = \frac{C(q)}{q}$

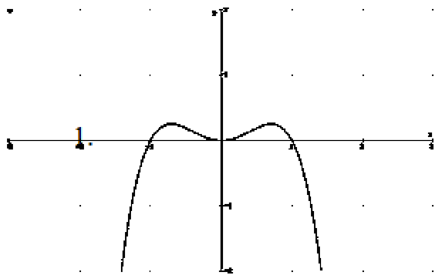
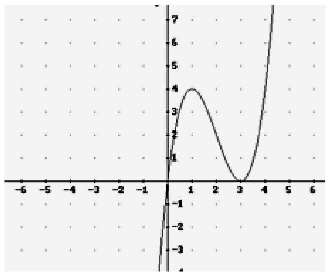
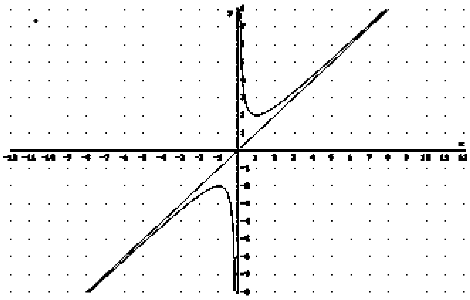
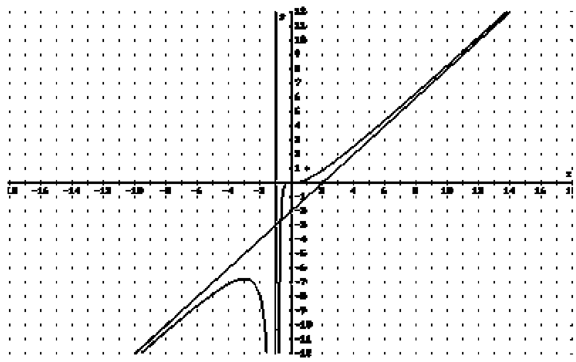
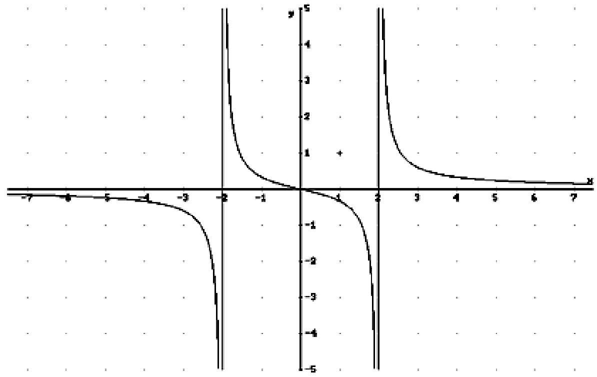
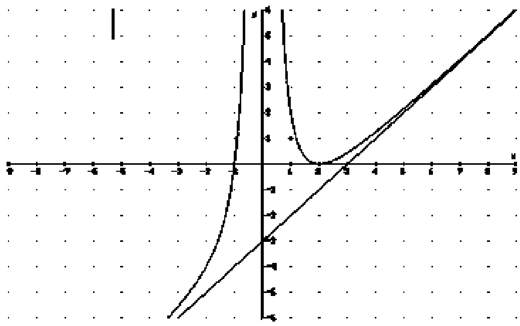
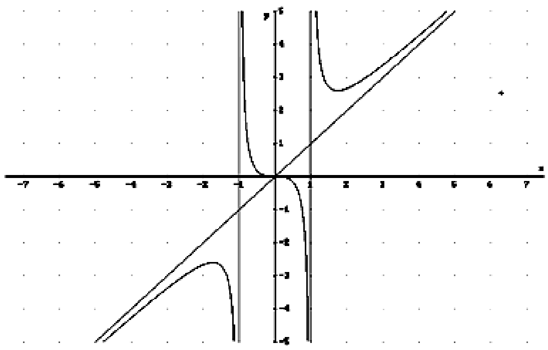
a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

10. Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - x^4$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}$ **g)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

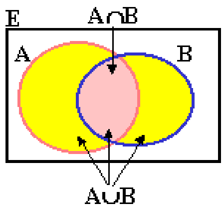
PROBABILIDAD

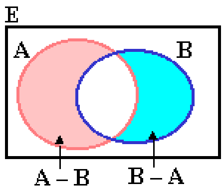
Resumen

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que acontezca un suceso aleatorio determinado, asignándosele un número, comprendido entre 0 y 1.
Un experimento se dice aleatorio cuando no se conoce con antelación lo que puede suceder.

Espacio muestral E. Es el conjunto de sucesos elementales a que da lugar la realización de un experimento aleatorio.
Ejemplo:
a) Al lanzar un dado con caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
b) Al extraer una carta de una baraja española, el espacio muestral está formado por 40 sucesos, uno por cada una de las cartas de la baraja: 10 de cada *palo* (oros, copas, espadas y bastos).

Un suceso es todo subconjunto de E. Si está determinado por un solo resultado se llama elemental; si está formado por varios se llama compuesto. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas A, B, C, ...
Suceso seguro: es el que ocurre siempre**.** Suele denotarse por E, como el espacio muestral.
Suceso imposible, denotado por ∅: no ocurre nunca.
Suceso contrario del suceso A**,** se denota por A^c (o también $\overline{A}$). Está compuesto por los elementos de E que no pertenecen a A. Por tanto, si ocurre A^c no ocurre A, y viceversa.





Operaciones con sucesos
Unión de A y B, A∪B, es un suceso que se cumple cuando lo hace alguno de los dos sucesos que lo componen. Esto significa que sucede A o B.
Intersección: $A \cap B$, es el suceso que se cumple cuando lo hacen los dos sucesos que lo componen: formado por los elementos comunes a A y a B.

- Cuando $A \cap B = \varnothing$, los sucesos A y B se dicen incompatibles.
- La diferencia**,** A – B, es el suceso formado por los elementos de A que no son de B (se cumple A pero no B).

Regla de Laplace. Si todos los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso *A* es: $P(A) = \dfrac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número total de casos posibles}}$

Propiedades de la probabilidad.
1. Probabilidad del suceso contrario de A: $P(A^c) = 1 - P(A)$**.**
2. Probabilidad de la unión de dos sucesos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Si los sucesos son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$ y $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidad condicionada.
La probabilidad de un suceso A puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso B. En este caso se habla de probabilidad de A condicionada por B, y se denota por P(A/B).
Se calcula mediante la fórmula: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

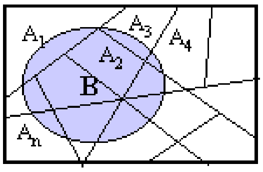
Análogamente, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(\mathrm{A})}$. De donde se deduce que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Ejemplo:
Si de una urna con 4 bolas blancas (B) y 6 negras (N) se extraen dos bolas consecutivamente, la probabilidad de que la primera bola sea blanca es P(1ª B) = 4/10; pero la probabilidad de que la segunda bola sea blanca se ve condicionada por el resultado de la primera extracción. Si la primera fue blanca, entonces la P(2ª B/1ª B) = 3/9: quedan 9 bolas, de las cuales 3 son blancas. Pero si la primera bola fue N, entonces la P(2ª B/1ª N) = 4/9.
Para el estudio de estos experimentos puede ser útil elaborar un diagrama de árbol.

Sucesos independientes
Dos sucesos A y B son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.
Por tanto, si A y B son independientes: P(A/B) = P(A) y P(B/A) = P(B).
En consecuencia, si los sucesos A y B son independientes se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

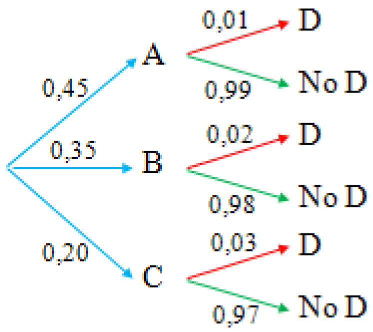
Probabilidad total
Si un suceso B está condicionado por otros A_i, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$, entonces, la probabilidad total del suceso B es:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$



Fórmula de Bayes: Da la probabilidad condicionada de un suceso relacionado con la probabilidad total. Por ejemplo, si se ha cumplido B, ¿cuál es la probabilidad de que haya sucedido en A_i, $P(A_i/B)$. Su valor es: $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$.

Ejemplo:
Una fábrica de chocolates cuenta con tres máquinas de envasado. La máquina A envasa el 45% del total de cajas que salen al mercado; la máquina B, el 35% de las cajas; la C, el 20%. El 1% de las cajas de chocolate envasadas en la máquina A tiene defectos en el envase; en el caso de la máquina B, las defectuosas son del 2%; en la C, salen defectuosas el 3%. Si se elige una caja de esa fábrica:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A y tenga defecto en el envase?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga defecto en el envase?
c) Si la caja tiene defecto, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina C?
Solución:
En el diagrama de árbol adjunto se resume la información del problema. En él, las letras A, B y C indican los sucesos "la caja de chocolate ha sido envasada en la máquina A, B o C", respectivamente. La letra D, indica el suceso tener defecto en el envase; No D, lo contrario.



a) La probabilidad de que una caja proceda de A y tenga un defecto en el envasado es $P(A \cap D)$.
Su valor es: $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = 0{,}45 \cdot 0{,}01 = 0{,}0045$
b) Por la probabilidad total,

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$
$$= 0{,}45 \cdot 0{,}01 + 0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}03 = 0{,}0175$$

c) La probabilidad de que una caja con defecto en el envase proceda de C se designa por P(C/D) y, por el fórmula de Bayes, vale:

$$P(C/D) = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}03}{0{,}0175} = \frac{60}{175} \approx 0{,}343.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Al extraer una carta de una baraja de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea
a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura.

2. Si se consideran familias con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que una de esas familias, elegida al azar, tenga al menos una niña?

3. Al lanzar cinco monedas iguales pueden obtenerse 0, 1, 2, 3, 4 o 5 caras. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de esos sucesos?

4. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado (con las caras numeradas del 1 al 6) se obtenga:
a) Al menos un as: {1}. b) Dos ases. c) Dos números distintos

5. Se lanzan dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que:
a) Su suma sea 4 o 5.
b) Uno a de los resultados sea par y el otro impar.
c) Uno de los resultados sea par sabiendo que la suma de los dos es 7.
d) Uno de los resultados sea 4 sabiendo que la suma de los dos es mayor que 7.

6. Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate. ¿Es un juego equitativo?

7. De una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 negras, todas de igual peso y tamaño, se hacen dos extracciones al azar y sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de sacar:
a) Dos bolas blancas. b) Sólo una negra. c) Del mismo color.
Halla las mismas probabilidades si las extracciones se hicieran con reemplazamiento.

8. En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
a) Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso “la primera bola extraída es un 5”.
b) ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
d) ¿Y la probabilidad de que termine en 3?

9. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
a) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.

10. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades: $P(A)=0,4$; $P(B)=0,5$ y $P(A\cup B)=0,7$. Halla la probabilidad de que:
a) Se cumplan los dos sucesos a la vez: $P(A\cap B)$.
b) Solo se cumpla A: $P(A-B)$. c) No se cumpla B: $P\left(\overline{B}\right)$.
d) No se cumpla ninguno de los dos: $P\left(\overline{A\cup B}\right)$.

11. Sean A y B dos sucesos tales que $P\left(A\cup B\right)=0{,}9$, $P\left(A\cap B\right)=0{,}2$ y $P\left(\overline{A}\right)=0{,}4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de A. Calcula las siguientes probabilidades:
a) $P\left(B\right)$; b) $P\left(A\cap\overline{B}\right)$; c) $P\left(\overline{A\cap B}\right)$; d) $P\left(\overline{A\cup B}\right)$.

12. A un congreso asisten 120 personas, de las que 70 hablan castellano, otro conjunto inglés y 30 ambos idiomas. Si se escogen 2 personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que se entiendan sin traductor?

13. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A)=0{,}7$; $P(B)=0{,}6$ y $P(A\cup B)=0{,}85$. Calcula:
a) $P(A\cap B)$ b) $P\left((A\cap B)^{C}\right)$
c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

14. Un examen de respuesta múltiple consta de 100 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Cada respuesta acertada suma un punto, la respuesta en blanco suma 0; pero las respuestas erróneas restan.
a) ¿Cuánto debe restarse por cada uno de los fallos para que el examen sea equitativo?
b) ¿Qué calificación obtendrá un alumno que acierta 67 peguntas, falla 21 y deja 12 en blanco?

15. a) En un grupo de 20 personas, ¿de cuántas maneras puede seleccionarse a 3 de ellas?
b) ¿De cuántas maneras distintas pueden seleccionarse 6 preguntas de examen entre 10 propuestas?
c) ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse las 40 cartas de una baraja entre 4 jugadores?

16. De una baraja española de 40 cartas se eligen al azar, simultáneamente, cuatro cartas. Halla la probabilidad:
a) De que se hayan elegido al menos tres reyes.
b) De que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

17. En una carrera participan 20 atletas:
a) ¿De cuántas maneras se pueden otorgar las medallas de oro, plata y bronce?
b) Si entre los 20 participantes hay 5 de categoría senior, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los atletas senior obtenga medalla?

18. En una mesa circular con 6 sillas se sientan a comer los padres y 4 hijos, si se sientan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los padres estén uno frente a otro?

19. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 2 escolares al azar, halla la probabilidad de que:
a) Sean 2 niños $\rightarrow$ suceso *A*. b) Sean 2 niñas $\rightarrow$ suceso *B*.
c) Sean una niña y un niño $\rightarrow$ suceso *C*.

20. Resuelve el problema anterior con la ayuda de un diagrama de árbol.

21. Al hacer tres lanzamientos de un dado, con las caras numeradas del 1 al 6, y sumar sus resultados se alcanzó una puntuación total de 12.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtuviera un 6?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?