MATEMÁTICAS NO SUPERADAS DE 2º ESO

PLAN DE RECUPERACIÓN

1ª Evaluación

TEMAS	FECHA TOPE DE ENTREGA
1.- NÚMEROS ENTEROS 2.- DIVISIBILIDAD 3.-DECIMALES 4.-FRACCIONES Y POTENCIAS	VIERNES 21 DE NOVIEMBRE

2ª Evaluación

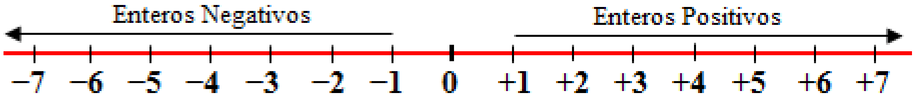
TEMAS	FECHA TOPE DE ENTREGA
5.-POLINOMIOS 6.-ECUACIONES DE 1º Y 2º GRADO. PROBLEMAS. 7.-.SISTEMAS DE ECUACIONES.	VIERNES 27 DE FEBRERO

3ª Evaluación

TEMAS	FECHA TOPE DE ENTREGA
8.- GEOMETRÍA. TEOREMA DE PITÁGORAS. SEMEJANZA. TALES. 9.- CUERPOS GEOMÉTRICOS.	JUEVES 30 DE ABRIL

Tema 1. Números enteros Resumen

El conjunto de los <u>números enteros</u> es **Z** = {... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3...}. Esta formado por los positivos y los negativos. Los números negativos son los opuestos de los positivos; así –2 es el opuesto de +2.
Pueden representarse en la recta así:



<u>Suma y resta</u>

- Para sumar dos números en teros con el mismo signo se suman los valores absolutos de ambos números y se pone el signo que tenían los sumandos.

Ejemplos: a) (+3) + (+7) = +10 b) (–7) + (–5) = –12

- Para sumar dos números con distinto signo hay que restarlos y ponerle al resultado el signo que lleve el número mayor en valor absoluto.

Ejemplos: a) (+3) + (–7) = –(7 – 3) = –4 b) (–6) + (+11) = +(11 – 6) = +5

- Para restar dos números enteros hay que tener en cuenta que: – (+) = –; – (–) = +

Ejemplos: a) – (+ 9) = –9; b) – (–10) = +10
Ejemplos: a) (–7) – (+9) = (–7) – 9 = –16 b) (+6) – (–10) = (+6) + 10 = 16

- Un signo menos delante de un paréntesis cambia el signo de todos los términos que abarca.

Ejemplos: a) –(4 + 5 – 3) = –4 – 5 + 3 = –6 b) –(–5 + 7 – 13) = +5 – 7 + 13 = +11

<u>Multiplicación y división.</u> En todos los casos hay que tener en cuenta las <u>reglas de los signos</u>:

[+] · [+] = [+]	[+] · [–] = [–]	[–] · [+] = [–]	[–] · [–] = [+]
[+] **:** [+] = [+]	[+] **:** [–] = [–]	[–] **:** [+] = [–]	[–] **:** [–] = [+]

Ejemplos:

(+3) · (+4) = +12;	(+7) · (–2) = –14;	(–5) · (+6) = –30;	(–1) · (–9) = +9
(+18) : (+3) = +6;	(+12) : (–2) = –6;	(–32) : (+8) = –4;	(–28) : (–7) = + 2.

<u>Operaciones combinadas</u>. El orden es el siguiente: 1) Paréntesis; 2) Productos; 3) Sumas.
Ejemplos: a) 12 – 2 · (9 – 3) – 10 : (–2) – (–7) = 12 – 2 · 6 + 5 + 7 = 12 – 12 + 5 + 7 = 12
b) (12 – 2) · (9 – 3) – 10 : [(–2) – (–7)] = 10 · 6 – 10 : (+5) = 60 – 2 = 58.

<u>Potencias de números enteros</u>. Se hace igual que con números naturales, pero hay que tener en cuenta el signo de la base y si el exponente es par o impar, cumpliéndose:

$(+a)^n = a^n \rightarrow$ siempre positivo. **Ejemplo:** $(+2)^5 = 2^5 = 32$; $(+3)^4 = 3^4 = 81$

$(-a)^n = a^n$, si n es par. **Ejemplo:** $(-2)^4 = 2^4 = 16$.

$(-a)^n = -a^n$, si n es impar. **Ejemplo:** $(-3)^5 = -3^5 = -243$.

<u>Propiedades de las potencias:</u>

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n\cdot m}$ $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$ $\quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad (a:b)^n = a^n : b^n$

Ejemplos: a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3 = (-2)^7 = -128$ b) $\left((-3)^3\right)^2 = (-3)^6 = +729$.

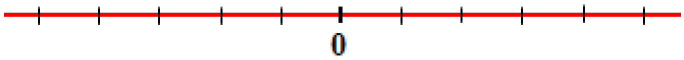
c) $(-2)^4 : (-2)^3 = (-2)^1 = -2$ d) $[(-2)\cdot(+3)]^3 = (-2)^3 \cdot (+3)^3 = (-8)\cdot(+27) = 216$

<u>Raíz cuadrada</u>: $\sqrt{a} = b$, $a > 0 \Leftrightarrow b^2 = a$. **Ejemplo**: $\sqrt{144} = 12$, pues $12^2 = 144$.

<u>Otras raíces</u>: $\sqrt[n]{a} = b$, $n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow b^n = a$. **Ejemplo**: $\sqrt[5]{32} = 2$, pues $2^5 = 32$.

Tema 1. Números enteros — Ejercicios

1. Representa en la recta real los números: –4, +3, –1. Representa también sus opuestos.



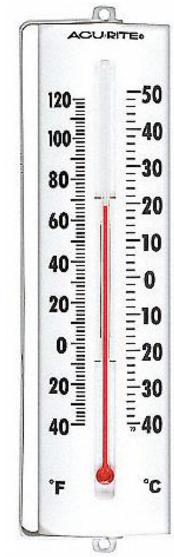
2. Halla:

a) (+13) + (+7) – (–3) + (–5) =

b) (–4) – (–5) – (+6) + (–7) =

c) (–7) – (+8) + (–3) – (–9) =

d) (+10) – (+9) + (–8) – (–7) =



3. Halla:

a) (–2) · (4 –6 + 9) =

b) (7 – 3) · (4 + 8 – 9) =

c) (–12) : (–2) – (–5) · (+ 7 – 10) =

d) (+20) : (–5) – (–2) · (+6) =

4. Calcula:

a) 12 + 5 · (–4) – 20 =

b) 13 – 2 · (4 – 5) =

c) (–3) · (3 + 5) – 4 · (– 9 – 5) =

d) –6 + (–4) · (+3) – 5 =

5. Halla:

a) 8 – 2 · (9 – 3) + (–12) : (–3) =

b) 8 – 2 · [(9 – 3) + (–12) : (–3)] =

c) (8 – 2) · [(9 – 3) + (–12)] : (–3) =

d) 8 – 2 · [(9 – 3) + (–12)] : (–3) =

6. Calcula:

a) (−12) : (−2) − 15 : (−3) + 2 =

b) (–3) · (–2) – 8 : (12 – 10) =

c) (–3) · (3 + 5) – 14 : (– 9 + 7) =

d) [(–3) · (–3 + 5) + 14] : 2 – (– 9 + 7) =

7. Calcula:

a) $(+4)^3 =$ b) $(-3)^4 =$

c) $(-5)^3 =$ d) $(+2)^7 =$

8. Calcula:

a) $(-2)^4 - (+3)^2 + (-5)^2 =$

b) $(-6)^4 : (-6)^3 =$

c) $(+5)^2 \cdot (-1)^7 - (-5)^2 - (-3)^3 =$

d) $\left((-2)^2\right)^6 : (-2)^9 =$

9. Halla:

a) $(-3)^2 - (+2)^3 =$

b) $(+2)^3 \cdot (-3) =$

c) $(+14)^6 : (-7)^6 =$

d) $(-1) - (+2)^2 + (-3)^3 - (-4)^4 =$

10. Halla, si existen, las siguientes raíces:

a) $\sqrt{(+81)} =$ b) $\sqrt{(-49)} =$

c) $\sqrt{(+1600)} =$ d) $\sqrt{(-12)(-3)} =$

11. Halla, si existen, las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{(+81)} =$ b) $\sqrt[3]{(-27)} =$

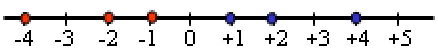
c) $\sqrt[5]{(-1)} =$ d) $\sqrt[7]{(+128)} =$

12. Halla, indicado todas sus soluciones:

a) $\sqrt{36} =$ b) $\sqrt[3]{-8} =$

c) $\sqrt[4]{625} =$ d) $\sqrt[6]{-6} =$

Soluciones:

1. 

2. a) +18. b) –12. c) –9. d) 0. **3**. a) –14. b) +12. c) –9. d) +8. **4**. a) –28. b) 15. c) +32. d) –23
5. a) 0. b) –12. c) +12. d) 4. **6.** a) +13. b) +2. c) –17. d) +6. **7**. a) 64. b) 81. c) –125. d) 128.
8. a) 32. b) –6. c) –23. d) –8. **9**. a) +1. b) –24. c) +64. d) –96. **10**. a) +9. b) No. c) +40. d) +6.
11. a) +3. b) –3. c) –1. d) +2. **12.** a) ±6. b) –2. c) ±5. d) no existe.

Tema 2. Divisibilidad   Resumen

Un número *a* es múltiplo por otro *b* si la división de *a* entre *b* es exacta. (Los números *a* y *b* deben ser naturales, aunque el concepto se extiende sin dificultad a los números enteros).
También puede decirse que *b* es divisor de *a*.

- Si *a* es múltiplo de *b* entonces *b* es divisor de *a*, y viceversa.
- Todo número entero tiene infinitos múltiplos, que se obtiene multiplicándolo por 0, 1, 2…
- Todo número es divisor y múltiplo de sí mismo.
- El número 0 es múltiplo de todos los números.
- El número 1 es divisor de todos los números.

Divisores de un número; números primos
Un número puede tener varios divisores → Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, y 12.
Si un número solo es divisible por sí mismo y por la unidad se llama primo.
Ejemplos:
a) Los números 7, 17 o 23 son primos.
b) 28, 39 y 69 no son primos: $28 = 4 \cdot 7$; $39 = 3 \cdot 13$; $69 = 3 \cdot 23$.

Descomposición factorial de un número
Descomponer un número en factores es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.
Ejemplos:
a) $72 = 2 \cdot 36$; o también, $72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 12$.
b) $100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

- Cuando todos los factores son primos se dice que el número está descompuesto como producto de factores primos.

Ejemplos:
a) 72 puede escribirse como: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \to 72 = 2^3 \cdot 3^2$.
b) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \to 100 = 2^2 \cdot 5^2$.

- Factor de un número es cada uno de sus divisores.
- Factorizar un número es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.
- Un número puede descomponerse factorialmente de varias maneras.
- Un número puede descomponerse en producto de sus factores primos de manera única, salvo el orden de esos factores.

Ejemplos:
Los números 72 y 100 se han escrito más arriba como producto de factores primos:
a) $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$; el orden no influye. $\to 72 = 2^3 \cdot 3^2$.
b) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \to 100 = 2^2 \cdot 5^2$.

Criterios de divisibilidad

- Divisibilidad por 2. Un número es divisible por 2 si es par.

Ejemplos: 2, 24 o 130 son múltiplos de 2. Los números 21 y 33 no son múltiplos de 2.

- Divisibilidad por 3. Un número es divisible por 3 si la suma de los valores de sus cifras en múltiplo de 3.

Ejemplos: 99, 132 o 2124 son múltiplos de 3, pues sus cifras suman, respectivamente, 18, 6 o 9, que son números múltiplos de 3.
Los números 122 o 2222 no son múltiplos de 3.

- <u>Divisibilidad por 5</u>. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

Ejemplos: 100, 205, 2000 y 2375 son múltiplos de 5.

<u>Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números</u>

- Dos números pueden tener varios divisores comunes. El mayor de ellos se llama máximo común divisor: m.c.d.

Ejemplo:
Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.
Los divisores de 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.
Los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores comunes de 36 y 48. El mayor de ellos es 12; este es el m.c.d. de 36 y 48. Se escribe: m.c.d.(36, 48) = 12.

- Dos números tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos se llama mínimo común múltiplo: m.c.m.

Ejemplo:
100, 250 y 500 son múltiplos comunes de 10 y de 25. Ninguno de ellos es el m.c.m.(10, 25), pues 50, que es menor que todos ellos, también es múltiplo de ambos: m.c.m.(10, 25) = 50.

<u>Criterio para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos números.</u>
Para determinar el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números se descomponen los números dados en sus factores primos.

- El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes a ambos números (en este criterio suele añadirse "con el menor exponente").
- El m.c.m. se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes a ambos números (afectados con el mayor exponente).

Ejemplo:
a) Los números 24 y 36 se descomponen así:
$24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$
m.c.d.(24, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$. m.c.m.(24, 36) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$.
b) Para 10 y 25:
$10 = 2 \cdot 5$; $25 = 5^2$
m.c.d.(10, 25) = 4. m.c.m.(10, 25) = $2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$.
c) Los números 24 y 25 no tienen divisores comunes, salvo el 1: se llaman <u>primos entre sí</u>. Su m.c.d. es 1; su m.c.m. es su producto.
m.c.d.(24, 25) =1. m.c.m.(24, 25) = $24 \cdot 25 = 600$.

→ <u>Una aplicación</u>.
En una carrera de Fórmula 1 uno de los coches (A) tarda 2 minutos en dar una vuelta al circuito; otro coche (B) tarda 2 min, 15 s en dar la misma vuelta. Si salen de meta a la vez:
a) ¿Cuánto tiempo tarda el coche A en doblar al coche B? (Doblar consiste en alcanzarlo; en adelantarlo viniendo desde atrás).
b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada coche en ese momento?

<u>Solución</u>:
a) Los coches coinciden en los múltiplos comunes de ambos tiempos, que deben expresarse en segundos: 120 s el coche A; 135 s el B.
Como $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $135 = 3^3 \cdot 5$ $\Rightarrow$ m.c.m.(120, 135) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ = 1080 s.
b) En ese tiempo el coche A da 9 vueltas (1080 : 120 = 9) y el coche B da 8 vueltas (1080 : 135 = 8).

Tema 2. Divisibilidad — Ejercicios

1. Calcula tres múltiplos y tres divisores, si los tiene, de cada uno de los siguientes números:

Múltiplos — Divisores

a) 50 →

b) 72 →

c) 16 →

d) 17 →

2. Indica cuáles de los siguientes números son primos (si no lo son, da uno de sus divisores):

a) 101 →

b) 1003 →

c) 2003 →

d) 2009 →

3. Descompón en factores primos los números:

a) 40	b) 105	c) 97	d) 360

4. A partir de su descomposición factorial, indica todos los divisores de:

a) 36	b) 42	c) 121	d) 71

4. Utilizando los criterios de divisibilidad, indica para los siguientes números sus divisores primos menores que 12:

a) 1234 → b) 600 →

c) 1008 → d) 420 →

5. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 25 y 35	b) 42 y 63	c) 10, 30 y 80	d) 24, 36 y 72

6. Halla todos los divisores comunes de:

a) 18 y 24 →

b) 21 y 28 →

c) 45 y 60 →

d) 9 y 23 →

7. Para cada una de las parejas anteriores, halla los tres múltiplos comunes más pequeños.

a) 18 y 24 →

b) 21 y 28 →

c) 45 y 60 →

d) 9 y 23 →

8. Halla todos los múltiplos comunes de 2, 3, 5 y 7 menores que 1000. ¿Cuál es el m.c.m. de esos números?

9. Indica, justificando tu repuesta, si las siguientes parejas de números son o no primos entre sí.

a) 21 y 40 →

b) 14 y 35 →

c) 33 y 143 →

d) 34 y 119 →

10. En cierta parada de autobús coinciden, a las 8:00 h, los vehículos de tres líneas diferentes, A, B y C. La línea A tiene un servicio cada 10 minutos, la línea B, cada 20 minutos, y la línea C, cada 15 minutos. ¿A qué hora volverán a coincidir los autobuses de las tres líneas en la salida?

11. Para pavimentar una habitación de 4 × 3,60 metros se desean emplear baldosas cuadradas. ¿Cuánto medirán de lado para que el número de baldosas sea mínimo, sin necesidad de cortar ninguna?

12. En una caja hay un número indeterminado de canicas. Si se cuentan de 7 en 7, de 8 en 8 y de 9 en 9, siempre sobran 5. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede haber en la caja?

Soluciones:

1. a) 50, 100 y 150; 25, 10 y 5. b) 72, 144 y 720; 36, 18 y 1. c) 32, 48 y 64; 8, 4 y 2. d) 17, 34 y 51; 1 y 17: es primo.
2. 101 y 2003.
3. a) 40 = 2 · 2 · 2 · 5. b) 105 = 3 · 5 · 7. c) 97 = 1 · 97, primo. d) 360 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5
4. a) 2 y 617. b) 2, 3 y 5. c) 2, 3 y 7. d) 2, 3, 5 y 7
5. a) 5 y 175. b) 7 y 126. c) 10 y 240. d) 12 y 72.
6. a) 6, 3, 2, 1. b) 7, 1. c) 15, 5, 3, 1. d) 1.
7. a) 48, 96, 144. b) 84, 168, 252. c) 180, 360, 540. d) 207, 414, 621.
8. 210, 420, 630 y 840.
9. a) S. b) No. Divisor común: 7. c) No. Divisor común: 11. d) No. Divisor común: 17.
10. 60 minutos después, a las 9:00 h.
11. 40 cm. 90 baldosas.
12. 509

Tema 3. Números decimales **Resumen**

El sistema de numeración decimal utiliza diez dígitos: 0, 1, 2, …, 9.
Diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.
Una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

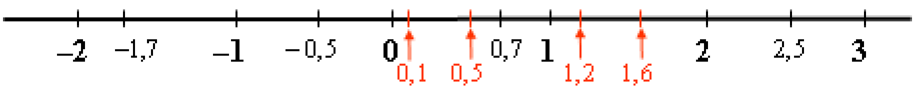
10 unidades = 1 decena; 10 decenas = 100 unidades = 1 centena.
1 unidad = 10 décimas → 1 décima = 0,1 unidades
1 décima = 10 centésimas → 1 centésima = 0,01 unidades
1 centésima = 10 milésimas → 1 milésima = 0,001 unidades.

El sistema de numeración decimal es posicional, que significa que el valor de una cifra depende de la posición que ocupa en el número.
Para expresar cantidades comprendidas entre dos números se utilizan los números decimales. Así, los números entre 3 y 4 se designan por 3,1; 3,45; 3,568…
Ejemplo: 345,304 = **3**00 + **4**0 + **5** + 0,**3** + 0,0**0** + 0,00**4** → Se lee: trescientos cuarenta y cinco unidades y trescientas cuatro milésimas → 345,304 = 345 + 0,304.

Tipos de números decimales
Números con un número finito de cifras decimales: 3,56; 0,567; 89,4
Números con infinitas cifras decimales periódicas: 3,55555…; 42,7090909…
Números con infinitas cifras decimales no periódicas: 2,012345…

Para comparar dos números decimales se contrastan cifra a cifra comenzando por la izquierda. Así, y es obvio: 3,45 < 4,01 y 5,768 > 5,767

Los números decimales pueden representarse en la recta numérica. Todo número representado a la izquierda es menor que cualquiera representado a su derecha.



Si un número tiene muchas cifras decimales conviene dar una aproximación por redondeo.
Redondear un número consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden; si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5 se le suma 1 a la última cifra.
El error cometido, que es la diferencia entre el valor real y el valor redondeado, es menor que media unidad del orden que se aproxima.
Ejemplo: a) El número 34,74389244 se aproxima a centésimas por 34,74. El error que se comete es 0,00389244 < 0,005 (media centésima).
b) El número 34,7458 se aproxima a centésimas por 34,75. El error que se comete es 34,75 – 34,7458 = 0,0042 < 0,005 (media centésima).

Operaciones con números decimales
Suma y resta: para sumar o restar números decimales se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de las unidades correspondientes.
Multiplicación: se multiplican como si fuesen enteros (sin la coma decimal); el número de cifras decimales del producto es la suma de las cifras decimales de los factores.
División: Se añaden ceros a la derecha al decimal que tenga menos cifras, hasta igualar las cifras decimales de ambos números. Para obtener los decimales del cociente se pone la coma y se siguen "bajando" ceros en el resto, hasta que se consiga el orden decimal deseado.

Tema 3. Números decimales Ejercicios

1. Escribe cómo se leen los siguientes números:

a) 2405 →

b) 203,8 →

c) 0,38 →

d) 20348 →

e) 3,0012 →

2. Escribe con números:

a) veinte unidades y treinta y dos milésimas →

b) cuatrocientas cinco diezmilésimas →

c) dos mil trescientas unidades y quinientas veinticinco cienmilésimas →

d) siete cienmilésimas →

3. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

3,08; 3,023; 3,24; 3,189; 3,203; 3,501; 3,303

4. Intercala un número entre cada pareja:

a) 4,9 < < 4,91 b) 7,23 < < 7,24

c) 0,021 < < 0,022 d) 2,33 < < 2,333…

5. Redondea a centésimas:

a) 234,6451 → b) 3,0025 →

c) 9,6449 → d) 1,675 →

6. Aproxima a las unidades:

a) 12,09 → b) 230,62 →

c) 90,78 → d) 10,463 →

7. Realiza las siguientes sumas y restas:

a) 23,1 + 12,34 + 678,00367	c) 24 – 12,8	d) 30445,24 – 8892,973

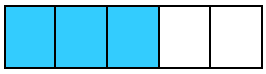
8. Multiplica:

a) $23{,}7 \times 3{,}4$	b) $39 \times 0{,}09$	c) $2{,}01 \times 7{,}04$	d) $0{,}0028 \times 0{,}06$

9. Divide:

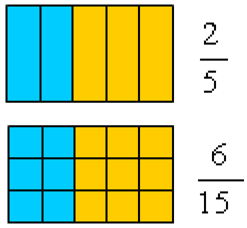
a) $24 : 3{,}2$	b) $2{,}05 : 0{,}1$	c) $0{,}28 : 0{,}05$	d) $12{,}6 : 3{,}02$

Tema 4. Fracciones (I) Resumen



Una fracción suele considerase como “la parte de un todo” que ha sido dividido en porciones iguales. Así, $\frac{3}{5}$ indica que se toman 3 trozos de algo que se ha dividido en 5 trozos iguales. Es la parte coloreada en la figura.
El número de arriba se llama numerador e indica cuántas son las partes que se toman; el número de abajo se llama denominador, e indica en cuántas partes se ha dividido la cosa.

- Para otras interpretaciones, véase, en esta web, los Conceptos Básicos del Tema 7 de 1º de ESO.



Dos fracciones son equivalentes cuando valen lo mismo. Así, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$.

→ Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y denominador de esa fracción por un mismo número distinto de cero. Esto es: $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a:n}{b:n}$.

Simplificar una fracción buscar otra, equivalente a ella, cuyos términos sean más sencillos, más pequeños. Para ello se dividen los dos términos entre el mismo número. Una fracción que no se puede simplificar se llama irreducible.

Ejemplos: a) $\frac{24}{36}=\left(\frac{24:2}{36:2}\right)=\frac{12}{18}=\left(\frac{12:6}{18:6}\right)=\frac{2}{3}$. b) $\frac{375}{1000}=[:25]=\frac{15}{40}=[:5]=\frac{3}{8}$.

Reducción de dos o más fracciones a común denominador

Para reducir fracciones a común denominador se halla un número que sea múltiplo de los denominadores; a continuación se buscan fracciones equivalentes a las dadas pero con ese denominador común.
Un denominador común se obtiene multiplicando los denominadores de todas las fracciones.

- Aunque sea más costoso, se prefiere hallar fracciones con el menor denominador común, que se obtiene calculado el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo: Dadas las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{12}$, las equivalentes a ellas con el mismo denominador son, respectivamente, $\frac{3\cdot 12}{8\cdot 12}$ y $\frac{7\cdot 8}{12\cdot 8}$. Esto es: $\frac{36}{96}$ y $\frac{56}{96}$.

- Si optamos por hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores, mcm(8, 12) = 24, las fracciones obtenidas serán: $\frac{3\cdot\boxed{3}}{8\cdot\boxed{3}}$ y $\frac{7\cdot\boxed{2}}{12\cdot\boxed{2}}$. Esto es: $\frac{9}{24}$ y $\frac{14}{24}$.

(Como el denominador 8 se multiplica por 3, 24 = 8 · 3, también debe multiplicarse por 3 el numerador correspondiente: 3 · 3 = 9. Igualmente, como el denominador 12 se ha multiplicado por 2, 24 = 12 · 2, también su numerador debe multiplicarse por 2: 7 · 2 = 14).

Suma y resta de fracciones

- Si las fracciones tienen el mismo denominador: la fracción suma o resta es la que tiene por numerador la suma o resta de los numeradores y por denominador el común.

Ejemplo: a) $\frac{4}{15}-\frac{7}{15}+\frac{8}{15}=\frac{4-7+8}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. b) $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-\frac{12}{9}=\frac{4+5-12}{9}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$.

- Si las fracciones tienen distinto denominador: se reducen a común denominador y se procede como antes.

Ejemplo: a) $\frac{13}{9}+\frac{5}{12}=\frac{52}{36}+\frac{15}{36}=\frac{52+15}{36}=\frac{67}{36}$. b) $\frac{7}{15}-\frac{4}{9}=\frac{21}{45}-\frac{20}{45}=\frac{21-20}{45}=\frac{1}{45}$.

Suma o resta de números enteros y fracciones

Si se escribe el número como una fracción con denominador 1, la operación se reduce a alguna de las anteriores. También puede aplicarse directamente las fórmulas:

$$a \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm c}{d}; \qquad \frac{a}{b} \pm c = \frac{a \pm cb}{b}.$$

Ejemplos: a) $3 + \frac{4}{15} = \frac{3}{1} + \frac{4}{15} = \frac{3\cdot 15 + 4}{15} = \frac{49}{15}$. b) $4 - \frac{3}{7} = \frac{4}{1} - \frac{3}{7} = \frac{4\cdot 7 - 3}{7} = \frac{25}{7}$.

a) $\frac{4}{7} + 2 = \frac{4}{7} + \frac{2}{1} = \frac{4 + 2\cdot 7}{7} = \frac{18}{7}$. b) $\frac{3}{8} - 5 = \frac{3}{8} - \frac{5}{1} = \frac{3 - 5\cdot 8}{8} = \frac{-37}{8}$.

Multiplicación de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador, el producto de los denominadores. Esto es: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Ejemplo: a) $\frac{4}{7}\cdot\frac{(-5)}{12} = \frac{4\cdot(-5)}{7\cdot 12} = \frac{-20}{84} = -\frac{5}{21}$. b) $\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10} = \frac{5\cdot 3}{12\cdot 10} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$.

Multiplicación de un número entero por una fracción

La fracción resultante tiene como numerador el producto del número por el numerador; el denominador será el mismo. Esto es: $a\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{d}$ y $\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b}$.

Ejemplos: a) $7\cdot\frac{5}{11} = \frac{7\cdot 5}{11} = \frac{35}{11}$. b) $\frac{3}{14}\cdot 6 = \frac{3\cdot 6}{14} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$.

División de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y como denominador, el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Esto es, sus términos se multiplican en cruz → $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Ejemplos: a) $\frac{6}{7} : \frac{3}{9} = \frac{6\cdot 9}{7\cdot 3} = \frac{54}{21} = \frac{18}{7}$. b) $\frac{3}{11} : \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{3}{11} : \frac{(-6)}{7} = \frac{3\cdot 7}{11\cdot(-6)} = \frac{21}{-66} = -\frac{7}{22}$.

División de un número entero por una fracción y de una fracción por un número entero

Escribiendo el número entero como una fracción con denominador 1 la operación se hace como se ha indicado en general. Esto es: $a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{c}$; $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b\cdot c}$.

Ejemplos: a) $4 : \frac{5}{7} = \frac{4}{1} : \frac{5}{7} = \frac{28}{5}$. b) $\frac{3}{8} : (-2) = \frac{3}{8} : \frac{(-2)}{1} = \frac{3}{8\cdot(-2)} = \frac{3}{-16} = -\frac{3}{16}$.

Prioridad de operaciones y uso de paréntesis

Cuando las operaciones aparecen combinadas, primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones; por último, las sumas y restas.

Ejemplos: a) $\frac{9}{20} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{20} - \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{15}{20} + \frac{4}{20}\right) = \frac{9}{20} - \frac{1}{9}\cdot\frac{19}{20} = \frac{9}{20} - \frac{19}{180} =$

$= \frac{81}{180} - \frac{19}{180} = \frac{62}{180} = \frac{31}{90}$.

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{36} - \frac{1}{5} = \frac{15}{180} - \frac{36}{180} = \frac{-21}{180} = -\frac{7}{60}$.

Tema 4. Fracciones (I) — Ejercicios

1. Reduce a común denominador las fracciones:

a) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \to$ (denominador común, 30) $\to \frac{12}{30}, \frac{10}{30}, \frac{5}{30}$.

b) $\frac{1}{3}, \frac{7}{15}, \frac{5}{12} \to$

c) $\frac{2}{9}, \frac{4}{15}, \frac{11}{30} \to$

d) $\frac{2}{7}, \frac{8}{21}, \frac{11}{42} \to$

2. Halla:

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6} = \frac{12}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30} = \frac{12+10-5}{30} = \frac{17}{30}$.

b) $\frac{1}{3}-\frac{7}{15}-\frac{5}{12} =$

c) $\frac{2}{9}-\frac{4}{15}+\frac{11}{30} =$

d) $\frac{2}{7}-\left(\frac{8}{21}-\frac{11}{42}\right) =$

3. Halla:

a) $3+\frac{1}{5} = \frac{3\cdot5+15}{5} = \frac{15+1}{5} = \frac{16}{5}$.

b) $2-\frac{1}{4} =$

c) $\frac{2}{7}+3 =$

d) $\frac{11}{2}-4 =$

4. Calcula y simplifica:

a) $\frac{3}{7}-\frac{1}{3} =$

b) $2+\frac{1}{4}-\frac{5}{12} =$

c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{18} =$

d) $\frac{3}{5}:\frac{12}{7} =$

5. Halla, simplificando el resultado:

a) $\frac{5}{12}\cdot\frac{9}{15} =$

b) $\frac{7}{18}\cdot\frac{6}{7} =$

c) $10\cdot\frac{9}{15} =$

d) $\frac{8}{15}\cdot12 =$

6. Calcula, simplificando el resultado:

a) $\frac{5}{12}:\frac{4}{15} =$

b) $4:\frac{2}{3} =$

c) $\frac{8}{15}:\frac{12}{15} =$

d) $\frac{50}{3}:5 =$

7. Calcula:

a) $\frac{2}{5}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{5}-\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\frac{12}{30}-\frac{5}{30}=\frac{7}{30}$.

b) $\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{15}\right)\cdot\frac{5}{12} =$

c) $\frac{2}{7}:\left(\frac{8}{21}-\frac{11}{42}\right) =$

8. Calcula y simplifica:

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4} =$

b) $\frac{1}{3}:\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{10}\right] =$

c) $\dfrac{\frac{3}{4}+1}{\frac{3}{5}-2} =$

d) $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right) =$

9. Calcula y simplifica:

a) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right) =$

b) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\right)\cdot 3-\frac{7}{4} =$

c) $\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\cdot 3-\frac{7}{4}=$

10. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{5} =$

b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} =$

c) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right):\frac{5}{6}-\frac{1}{5} =$

Tema 4. Fracciones (II) Resumen

Aplicaciones de las fracciones para resolver problemas

1. Fracción de una cantidad

Ejemplo: ¿Cuánto son los $\frac{3}{7}$ de 350 euros?

→ Los $\frac{3}{7}$ de 350 € = $\frac{3}{7}\cdot 350 = \frac{3\cdot 350}{7} = \frac{1050}{7} = 150$.

- De otra forma:

La sétima parte de 350 € son 350 : 7 = 50 € → $\frac{1}{7}$ de 350 = $\frac{350}{7} = 50$.

Por tanto, $\frac{3}{7}$ de 350 = $3\cdot\frac{350}{7} = 3\cdot 50 = 150$.

2. Expresión de una parte como una fracción

Ejemplo: En una carrera ciclista participan 180 corredores. Si durante la carrera se retiran 45 corredores, ¿qué fracción del total de ciclista participantes terminó la carrera?
→ La carrera la terminan 180 – 45 = 135 ciclista.
La fracción correspondiente es: $\frac{135}{180} = \frac{3}{4}$.

3. Obtención del total a partir de la fracción

Ejemplo: Un depósito de agua ha vaciado los $\frac{3}{8}$ de su capacidad, lo que equivale a 4500 litros. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

→ Si 4500 litros son los $\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{4500}{3} = 1500$ litros será $\frac{1}{8}$ de su capacidad ⇒ La capacidad del depósito será 8 · 1500 = 12000 litros.

- De otra forma: La fracción $\frac{3}{8}$ debe ser equivalente a la fracción $\frac{4500}{C}$, siendo C la capacidad total del depósito. Luego $\frac{3}{8} = \frac{4500}{C}$ → Como 4500 = 3 · 1500 ⇒ C = 8 · 1500 = 12000.

4. Suma o resta de partes de una cosa

Ejemplo: Durante dos días consecutivos un depósito de agua ha vaciado los $\frac{3}{8}$ y los $\frac{2}{9}$ de su capacidad. Si inicialmente estaba lleno:
a) ¿qué fracción de agua queda en el depósito?;
b) si el depósito contenía 12000 litros, ¿cuántos litros quedan?

→ a) Lo vaciado es $\frac{3}{8} + \frac{2}{9} = \frac{27+16}{72} = \frac{43}{72}$ → Lo que queda es $1 - \frac{43}{72} = \frac{72-43}{72} = \frac{29}{72}$.

→ b) Quedarán $\frac{29}{72}$ de 12000 litros = $\frac{29\cdot 12000}{72}$ = 4833,3 litros.

5. Multiplicación de partes de una cosa

Ejemplo: ¿Cuántos litros de agua se necesitarán para llenar 200 botellas de un quinto de litro?

→ Hay que multiplicar 200 por $\frac{1}{5}$ → $200 \cdot \frac{1}{5} = \frac{200}{5} = 40$.

6. División de una cosa en partes iguales

Ejemplo: Un gato necesita cada día una ración de $\frac{2}{9}$ de kg de un producto llamado “GatoVip”. ¿Cuántas raciones diarias se pueden hacer con 40 kg de producto?

→ Hay que dividir 40 entre $\frac{2}{9}$ → $40 : \frac{2}{9} = \frac{360}{2} = 180$.

7. Partes de una parte

Ejemplo 1: Un depósito de agua ha vaciado un día los $\frac{3}{8}$ de su capacidad; al día siguiente vacía $\frac{1}{3}$ de lo que quedaba. Si inicialmente estaba lleno:

a) ¿qué fracción de agua se ha vaciado en los dos días?; ¿qué fracción queda en el depósito?

b) si el depósito contenía 12000 litros, ¿cuántos litros se han vaciado?

→ a) Primer día. Se vacían $\frac{3}{8}$ → Quedan $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Segundo día. Se vacía $\frac{1}{3}$ de $\frac{5}{8}$ = $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$.

Entre los dos días se ha vaciado: $\frac{3}{8} + \frac{5}{24} = \frac{9+5}{24} = \frac{14}{24} \rightarrow$ Quedan $1 - \frac{14}{24} = \frac{24-14}{24} = \frac{10}{24}$.

b) Se han vaciado $\frac{14}{24}$ de 12000 litros = $\frac{14 \cdot 12000}{24} = 7000$ litros.

Ejemplo 2: Un saltamontes salta tres veces seguidas. El primer salto es de 2 metros; el segundo es $\frac{7}{8}$ la longitud del primero; y el tercero de $\frac{4}{5}$ la del segundo. ¿Cuánto ha saltado en total?

→ Primer salto → 2 m

Segundo salto: $\frac{7}{8}$ de 2 m = $\frac{7}{8} \cdot 2 = \frac{14}{8}$ m.

Tercer salto: $\frac{4}{5}$ de $\frac{14}{8}$ = $\frac{4}{5} \cdot \frac{14}{8} = \frac{56}{40} = \frac{14}{10}$ m.

En total ha saltado $2 + \frac{14}{8} + \frac{14}{10} = \frac{80+70+56}{40} = \frac{206}{40}$ m = 5,15 m

Tema 4. Problemas de fracciones (I)

1. Pilar ha leído 100 páginas de un libro, lo que representa 4/7 del total. ¿Cuántas páginas tiene ese libro?	→ 
2. Carlos está leyendo un libro. La primera semana lee 3/7 de las páginas, y la segunda semana los 4/5 del resto. Si todavía le quedan 48 páginas por leer, ¿cuántas páginas tiene el libro?	→ 
3. Se han roto los 8/13 de los huevos que contenía una caja. Si han quedado 75 huevos sin romper, ¿cuántos huevos contenía la caja?	→
4. Sara tiene 28 €; gasta la quinta parte en pasteles, y la cuarta parte de lo que le queda en cromos de 0,40 € cada uno. Calcular: a) El dinero que gastó en pasteles; b) El número de cromos que compró; c) El dinero que le sobró.	→
5. Marta lleva 300 € y Sara 1/3 de los 4/5 de esa cantidad. ¿Cuánto dinero lleva Sara?	→
6. Un recipiente está lleno de agua hasta los 4/5 de su capacidad. Si se saca la mitad del agua que contiene: a) ¿Qué fracción de la capacidad total del recipiente se ha sacado? b) Si la capacidad del recipiente fuera de 80 litros, ¿cuántos litros quedarían en el mismo?	→ 
7. Una finca se divide en tres parcelas. La primera es igual a los 4/7 de la superficie de la finca, y la segunda mide la mitad de la primera. a) ¿Qué fracción de la finca representa la superficie de la tercera parcela? b) Si la extensión de la finca es de 14000 m^2, ¿cuál es la superficie de cada parcela?	→

8. Un sexto de los $\frac{2}{3}$ de la estatura de Alicia es igual a 17 cm. ¿Cuál es la estatura de Alicia?	→
9. Tengo diez kilos y medio de bombones distribuidos en cajas de 3/4 kg cada una. ¿Cuántas cajas tengo?	→
10. En una bombonería hay 120 cajas de bombones. Si el peso neto de los bombones de cada caja es de 1/3 de kg, ¿cuántos kilos de bombones tienen en total?	→ 
11. Un confitero ha distribuido ocho kilos y cuarto de bombones en 33 bolsas. ¿Qué fracción de kilo contiene cada bolsa?	→
12. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro pueden llenarse con una garrafa de 24 litros?	→
13. ¿Cuántas botellas de 1,5 litros pueden llenarse con una garrafa de 33 litros?	→
14. Dos tercios de los alumnos de una clase son chicas. Si el total de alumnos son 27, ¿cuántas chicas hay en la clase?	
15. En una clase hay 5 chicas por cada 3 chicos. a) ¿Qué fracción del total representa a las chicas? b) Si en la clase hay 12 chicos, ¿cuántos alumnos hay en total?	
16. Un poste está clavado en el suelo. La parte enterrada es 1/7 de su longitud. Si la parte visible mide 120 cm, ¿cuál es la longitud total del poste?	

Soluciones:
1. 175. **2**. 420. **3**. 195. **4**. a) 5,60 €. b) 56. c) 0 €. **5**. 80 €. **6**. a) 2/5. b) 32 L.
7. a) 1/7. b) 8000, 4000 y 2000 m^2, respectivamente. **8**. 153 cm. **9**. 14. **10**. 40 kg.
11. 1/4 kg. **12**. 32. **13**. 22. **14**. 18. **15.** 5/8. 32. **16**. 140 cm.

Tema 4. Problemas de fracciones (II)

17. El límite inferior de la zona de nieves perpetuas en España está, aproximadamente, a 3000 metros. Sabiendo que la altura del pico Mulhacén es los 29/25 de este límite, ¿cual es la altura del Mulhacén? ¿Qué altura de este pico tiene nieves perpetuas?	→ 
18. Jorge ha comprado una calculadora con los 2/7 del dinero que tenía, y un diccionario con los 2/3 de lo que le quedaba, si le han sobrado 25 €, ¿Cuánto tenía al principio?	→
19. El bibliotecario Pedro está registrando todos los libros de la biblioteca. Ya ha registrado los 2/5 del total de libros. Si aún le quedan por registrar la mitad del total, más 800 libros, ¿cuántos libros tiene la biblioteca?	→
20. Un agricultor ha visto cómo su cosecha ha disminuido como consecuencia de un temporal de cuatro días de duración. El primer día perdió 1/3 de la cosecha; el segundo, 1/3 de lo que perdió el primero; el tercero, 1/3 de lo que perdió el segundo; y el cuarto día del temporal perdió 1/3 de lo que perdió el tercero. Después de estas pérdidas su cosecha se valoró en 820 €. a) ¿Qué fracción de su cosecha perdió el cuarto día? b) ¿Cuál era el valor de su cosecha antes del temporal? c) ¿Cuánto ha perdido en los cuatro días?	→ 
21. Si el mismo agricultor dice que cada uno de los cuatro días del temporal perdió un tercio de la cosecha que le quedaba, ¿habría tenido las mismas pérdidas?	→
22. Una persona sale de compras. Gasta los 3/7 de su dinero en el supermercado, después 1/3 de lo que le quedaba en una tienda de regalos, y, finalmente gasta la mitad de lo que le quedaba en un libro de 5 €. ¿Cuánto dinero tenía al salir de casa? ¿Cuánto gastó en el supermercado?	→

23. Enrique ha comprado 450 litros de aceite. Si los envasa en botellas de 3/4 de litro, ¿cuántas botellas necesita? ¿Cuál será el precio del litro, sabiendo que el valor del aceite que contiene cada botella es de 2,88 €?	→ 
24. ¿Por qué fracción hay que multiplicar a 20 para obtener 5/8?	
25. Un tornillo avanza 3/10 de centímetro cada 5 vueltas. ¿Cuántas vueltas deberá dar para avanzar 4,5 cm?	→
26. Se han consumido los 7/8 de un bidón de aceite. Reponiendo 38 litros, el bidón queda lleno en sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del bidón.	→
27. ¿Por qué fracción hay que dividir 1/5 para obtener 8/15?	→
28. ¿Cuál es el valor de 1 kg de jamón si se vende a 6,50 € cada medio cuarto de kilo?	→
29. El precio de una bicicleta se ha rebajado la décima parte. Si ahora cuesta 144 €, ¿cuánto valía antes?	→
30. He andado las dos terceras partes del camino, pero aún me quedan 1200 metros. ¿Qué longitud tiene el camino?	→
31. Un grifo llena un depósito en 6 horas y otro en 12 horas. ¿Qué fracción de depósito llena cada grifo en una hora? ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el depósito cada uno de los grifos?	→ 
32. Un grifo llena un depósito en 6 horas y otro en 12 horas. ¿Qué fracción de depósito llenaran entre ambos grifos durante 1 hora? ¿Cuánto tardarán en llenar el depósito entre los dos grifos?	

Soluciones:
17. 3480 m. 480 m. **18**. 525 €. **19**. 800. **20**. a) 1/81. b) 162. c) 80. **21**. Aquí, 65/81; antes, 41/81. **22**. 26,25 €. 11,25 €. **23**. 600. 1728 €. **24**. 1/32. **25**. 75. **26**. 80 L. **27**. 3/8. **28**. 52 €/kg. **29**. 160 €. **30**. 3600 m. **31**. 1/6 y 1/12, respecti… 6 h y 12 h, respecti…. **32**. 3/12. 4 h.

Tema 4. Potencias y Fracciones (III) — Resumen

La potencia de una fracción tiene el mismo significado que la potenciación en general, y se cumplen las mismas propiedades que en potenciación con números enteros.

Propiedades de la potenciación con números enteros:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n\cdot m}$ $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$ $\quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad (a:b)^n = a^n : b^n$

Potencia de una fracción. Definición: $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Propiedad inicial: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. También se emplea al revés: $\frac{p^n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$. b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$. c) $\frac{6^3}{9^3} = \left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

Producto y cociente de potencias de la misma base:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Ejemplos: a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$; b) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Potencia de un producto de fracciones: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{12}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$.

Potencia de un cociente de fracciones: $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$

Ejemplos: $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} : \frac{5^3}{6^3} = \frac{1}{27} : \frac{125}{216} = \frac{216}{27\cdot 125} = \frac{216}{3375} = \frac{8}{125}$.

- En este caso, conviene operar antes el paréntesis: $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$.

Potencia de una potencia: $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$ **Ejemplo:** $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^8$.

Potencia de exponente 0: $a^0 = 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ **Ejemplos**: $\left(\frac{7}{8}\right)^0 = 1$; $\left(\frac{-1}{5}\right)^0 = 1$.

Potencia de exponente negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Ejemplos: a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$. b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$. c) $\frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$.

Números y potencias de base 10

La potencia 10^n equivale a la unidad de orden de magnitud n; esto es, 1 seguido de tantos ceros como indica el exponente n. Así:

$10^0 = 1$ (unidad). $10^1 = 10$ (decena: orden de magnitud 1).

$10^2 = 100$ (centena: magnitud 2). $10^3 = 1000$ (unidad de millar: magnitud 3) …

Si se extienden esta notación a exponentes negativos se tiene:

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ (décima). $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ (centésima)

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ (milésima). $10^{-4} = 0{,}0001$; … ; $0{,}000001 = 10^{-6}$…

Por tanto, cualquier número entero o decimal, puede escribirse mediante potencias de 10.

Ejemplos:

a) $7345304 = 7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

b) $368{,}098 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} =$
$= 300 + 60 + 8 + 0{,}0 + 0{,}09 + 0{,}008$.

Números muy grandes o muy pequeños

Las potencias de 10 facilitan la expresión de números de muchas cifras, decimales o no. En muchos de ellos, para facilitar la comprensión de la cantidad conviene redondear.

Ejemplos:

a) $160000000 = 16 \cdot 100000000 = 16 \cdot 10^8$. También: $1{,}6 \cdot 1000000000 = 1{,}6 \cdot 10^9$

b) $0{,}00000089 = 89 \cdot 0{,}00000001 = 89 \cdot 10^{-8}$. También: $8{,}9 \cdot 10^{-7}$

Fracciones y números decimales.

Al dividir el numerador entre el denominador se obtiene un número decimal. Por tanto, una fracción puede considerarse como un número decimal.

Ejemplos: $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{12}{5} = 2{,}4$; $\frac{23}{100} = 0{,}23$; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

- Y al revés, los números decimales (con un número finito de cifras decimales o con infinitas cifras decimales periódicas) pueden escribirse como una fracción.

Ejemplos: $0{,}78 = \frac{78}{100}$; $3{,}2 = \frac{32}{10}$; $0{,}375 = \frac{375}{1000}$.

Para obtener la fracción equivalente (generatriz) a un números decimal periódico hay que multiplicar el número dado por 10, 100, …, según convenga, a fin de que al restar los números se consiga eliminar las cifras decimales.

Ejemplo: Si el número es 2,5676767… → Se escribe $F = 2{,}5676767\ldots$

- Se multiplica por 1000: $1000 \cdot F = 2567{,}6767\ldots$
- Se multiplica por 10: $10 \cdot F = 25{,}6767\ldots$
- Se restan esos números: $990 \cdot F = 2542$ → Se despeja F: $F = \frac{2542}{990}$.

Los números racionales, son todos los que pueden escribirse en forma de fracción.

Los números racionales son: los naturales, los enteros, los decimales con un número finito de cifras decimales, y los números decimales periódicos.

- Los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no son racionales. Se llaman números irracionales. Por ejemplo: 7,01002000300004…

Tema 4. Potencias y Fracciones (III) — Ejercicios

1. Calcula:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 =$

c) $\frac{10^3}{3^3} =$

d) $\frac{3^3}{10^3} =$

2. Halla:

a) $\frac{3^8}{6^8} =$

b) $\frac{10^4}{15^4} =$

c) $\left(\frac{50}{100}\right)^5 =$

d) $\frac{12^3}{8^3} =$

3. Simplifica:

a) $\frac{2^{15}}{2^{11}} =$

b) $\frac{12^5}{6^5} =$

c) $\frac{(-2)^7 \cdot 16}{4^3} =$

4. Simplifica al máximo:

a) $\frac{2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^3}{2^6 \cdot 3^7 \cdot 50} =$

b) $\frac{25^2}{30^5} \cdot \frac{12^6}{10^4} =$

5. Calcula, simplificando al máximo:

a) $3 \cdot (2^{-2} + 3^2) - 5 \cdot (-4)^2 + 7 \cdot 3^{-1} =$

b) $3^{12} \cdot 3^{-10} =$

6. Expresa mediante una sola potencia:

a) $\frac{5^3}{5^5} =$

b) $\frac{2^4}{2^7} =$

c) $\frac{5^4}{15^4} =$

d) $\frac{(-9)^{-5} \cdot 3^4}{27^{-3}} =$

7. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3^4 =$ b) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{15}{8}\right)^3 =$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 : \left(\frac{8}{5}\right)^3 =$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$

8. Calcula, simplificando al máximo:

a) $\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 =$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^5 =$

c) $\left(\frac{4}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} =$ d) $\left(\frac{2}{5} : \frac{4}{15}\right)^4 =$

9. Calcula:

a) $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)^3 =$ b) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^2 =$ c) $\left(\left(\frac{5}{9}\right)^4\right)^0 =$

10. Expresa en función de las potencias de 10 las siguientes cantidades:

a) 500000 =   b) 2100000 =   c) 1230000000 =

d) 0,000006 =   e) 0,00032 =   f) 0,00000090 =

11. Expresa en notación decimal las siguientes cantidades dadas en función de las potencias de 10:

a) $3{,}05 \cdot 10^6 =$ b) $6{,}804 \cdot 10^7 =$

c) $2 \cdot 10^{-4} =$ d) $4{,}01 \cdot 10^{-5}$

12. Escribe como número decimal cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{12}{5} =$ b) $\frac{7}{4} =$

c) $\frac{13}{3} =$ d) $\frac{7}{22} =$

13. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

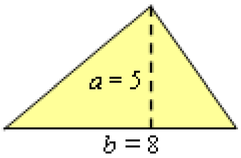
a) 12,023 =   b) 3,444… =

c) 5,232323… =   d) 2,12333… =

Tema 5. (I) Álgebra **Resumen**

Una expresión algebraica es aquella en la que aparecen números y letras, unidos por las operaciones habituales.
El álgebra utiliza esas expresiones para establecer relaciones de carácter genérico, pues las letras pueden tomar cualquier valor.

- El álgebra permite dar fórmulas generales. Así, el área de cualquier triangulo es $A = \frac{b \cdot a}{2}$, siendo *b* la base y *a* la altura.



Si la base mide 8 y altura 5, el área del triángulo es: $A = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.

- El álgebra permite expresar propiedades generales. Así, para indicar que una operación, por ejemplo la suma, cumple la propiedad conmutativa, se escribe: $a + b = b + a$.
- El álgebra permite manejar números de valor desconocido. Así, si con la letra *x* se designa un número desconocido:

El doble de *x* es 2*x*, que significa 2 · *x*. Por tanto, si *x* valiese 8, 2*x* valdría 16.

La mitad de *x* es $x : 2 = \frac{x}{2}$ → Si *x* valiese 100, $\frac{x}{2}$ valdría 50.

El cuadrado de *x* es x^2, que significa $x \cdot x \rightarrow$ si *x* valiese 7, x^2 = 7 · 7 = 49.

La suma $2x + 5x$ es igual a $7x$. Igualmente: $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}x = \frac{8}{3}x$; y $x - \frac{x}{3} = \frac{x}{1} - \frac{x}{3} = \frac{3x}{3} - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$.

- El álgebra permite establecer relaciones entre números. Así, para indicar que dos números son consecutivos se les da valores *x* y *x* + 1. escribe

Monomios. Son las expresiones algebraicas más simples. Sólo tiene un término.
Un término es: un número; una letra; o un producto de números por letras.

Ejemplos: a) Cualquier número es un término. Así, 8, –3 o $\frac{4}{3}$ son términos, que por no poder variar se llaman constantes.
b) Cualquier letra es un término. Así, *a*, *b* o *x* son términos.
c) Cualquier producto de números por letras es un término. Así, $3 \cdot a$, $-4 \cdot a \cdot x$ o $x \cdot x$ son términos. Esos términos suele escribirse omitiendo los puntos de multiplicar. Esto es:

$3 \cdot a = 3a$, $-4 \cdot a \cdot x = -4ax$ o $x \cdot x = x^2$.

d) La expresión $2a^2b - 4b + 5$ no es un monomio, pues esta formada por tres términos. Por tanto, si hay sumas o restas la expresión no es un monomio. Se llamará polinomio.

- En un monomio, al número se le llama coeficiente; a la letra o letras que lo multiplican se le llama parte literal.

Ejemplo: La parte literal de $3a$, $-4ax$ y x^2 es, respectivamente, a, ax y x^2. Sus coeficientes, también respectivamente, son: 3, –4 y 1.
Observa que cuando la parte literal no lleva número, su coeficiente es 1; y si va sola con signo negativo, su coeficiente es –1. No se ponen por comodidad. Así, los coeficientes de $-ab^2$ y de x^3 son, respectivamente, –1 y 1.

- Valor numérico de un monomio es el valor que se obtiene cuando se sustituyen las letras por números. Así, en $-ab^2$, si *a* = 3 y *b* = –2, su valor es $-3 \cdot (-2)^2 = -3 \cdot 4 = -12$.

- El <u>grado de un monomio</u> es el grado de la parte literal, que es la suma de los grados de las letras que la forman.

Ejemplo: El grado de $3a$ es 1; el grado de x^2 es 2; el grado de $2a^2b$ es 3.

<u>Dos monomios son semejantes</u> cuando tienen la misma parte literal.
Ejemplos:
a) Los monomios $3a$ y $5a$ son semejantes.
b) También son semejantes los monomios: x^2 y $6x^2$; y, $2a^2b$ y $3a^2b$.
c) No son semejantes: $3a$ y $2ab$. Tampoco lo son $2x^2$ y $3x$.

<u>Suma y resta de monomios</u>
Solo pueden sumarse o restarse los monomios semejantes.
Cuando dos monomios no son semejantes, no pueden agruparse; la operación se deja indicada.
Ejemplos:
a) Los monomios $3a$ y $5a$ pueden sumarse y restarse. Esto es, pueden hacerse las operaciones: $3a+5a$ y $3a-5a$
b) Los monomios $2x^2$ y $3x$ no pueden sumarse ni restarse. Las operaciones $2x^2+3x$ y $2x^2-3x$ no pueden realizarse, se dejan así.

- Para sumar (o restar) monomios se suman (o restan) los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Ejemplos:
a) $3a+5a=(3+5)a=8a$; b) $3a-5a=(3-5)a=-2a$; c) $2x+7x-5x=4x$.
d) $2x^2+3x$ se deja indicada, como está. e) $2x+7x-5=9x-5$.

- La suma y resta de expresiones algebraicas cumplen las mismas propiedades que la suma y resta de números. Habrá que tener en cuenta las reglas de los signos.

Ejemplos:
a) $2a+7a=7a+2a$; b) $5a-(a-3a)=5a-(-2a)=5a+2a=7a$.

<u>Producto de monomios</u>
Pueden multiplicarse cualquier tipo de monomios entre sí.
Para multiplicar dos monomios se multiplican números por números y letras por letras.
Ejemplos:
a) $(3a)\cdot(5a)=(3\cdot5)\cdot(a\cdot a)=15a^2$; b) $(3a)\cdot(-5a)=(3\cdot(-5))\cdot(a\cdot a)=-15a^2$;
c) $x\cdot x\cdot x=x^3$; d) $(2x^2)\cdot(3x)=2\cdot3\cdot x^2\cdot x=6x^3$.

<u>División de monomios</u>
Pueden dividirse cualquier tipo de monomios entre sí.
Para dividir dos monomios se dividen números entre números y letras entre letras. La parte de la expresión que no pueda simplificarse se dejará indicada en forma de fracción
Ejemplos:
a) $\frac{12a^2}{3a}=\frac{12}{3}\cdot\frac{a^2}{a}=4a$; b) $\frac{10a^2b}{15ab^3}=\frac{10}{15}\cdot\frac{a^2}{a}\cdot\frac{b}{b^3}=\frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{b^2}=\frac{2a}{3b^2}$;
c) $\frac{5x^2}{15x}=\frac{5}{15}\cdot\frac{x^2}{x}=\frac{1}{5}x=\frac{x}{5}$; d) $\frac{-10x^2y}{5xy^2}=\frac{-10}{5}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{y}{y^2}=-2x\cdot\frac{1}{y}=-\frac{2x}{y}$.

Tema 5. (I) Álgebra — Ejercicios

1. Sea un rectángulo de base *b* y altura *a*. Indica las expresiones algebraicas que dan el área y el perímetro de ese rectángulo. ¿Cuál será el valor numérico de esas expresiones cuando $a = 2$ y $b = 7$ cm. (Haz un dibujo adecuado).

2. Indica mediante una expresión algebraica las siguientes relaciones:

a) La suma de dos números es 34 $\rightarrow$

b) Un número es tres unidades mayor que otro $\rightarrow$

c) Un número más su consecutivo $\rightarrow$

d) El triple de un número vale 51 $\rightarrow$

3. Indica mediante una expresión algebraica las siguientes situaciones:

a) La suma de dos números consecutivos vale 71 $\rightarrow$

b) Un padre tiene cuatro veces la edad de su hijo y entre ambos suman 45 años.

$\rightarrow$

c) Un número más su cuadrado suman 20 $\rightarrow$

4. Indica el coeficiente y la parte literal de los siguientes monomios:

a) $5ab \rightarrow$ b) $-x^3 \rightarrow$

c) $\dfrac{4x^2y}{3} \rightarrow$ d) $5x^2 \rightarrow$

5. Indica si son semejantes o no los siguientes pares de monomios:

a) $-3a$ y $2a \rightarrow$ b) $4a^3$ y $4a \rightarrow$

c) $-x^2$ y $\dfrac{4x^2}{3} \rightarrow$ d) $2x^3$ y $3x^2 \rightarrow$

6. Suma o resta, en los casos que puedas:

a) $5a-3a+8a =$ b) $5a-(6a-2a) =$

c) $2x-3x =$ d) $3x^2-x^2 =$

e) $2x^2+3x^3 \rightarrow$ f) $\dfrac{7}{3}x-\dfrac{2}{9}x =$

7. Simplifica, sumando y restando cuando se pueda:

a) $5x+7x-4x=$ b) $3a^2-\left(5a^2-3a^2\right)=$

c) $5x-3x+7=$ d) $3x^2+6x-3x=$

e) $2x^2-5x-3x^3+4x=$ f) $\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}x=$

8. Simplifica, agrupando los términos semejantes:

a) $3a+5a-(4a-3)=$

b) $3x-5x^2-\left(2x^2+3x\right)=$

c) $5x-(3x-6)-4=$

9. Multiplica, haciendo las operaciones paso a paso:

a) $5\cdot\left(3a^2\right)=$ b) $(-3)\cdot(-5a)=$

c) $4\cdot(2a)\cdot\left(-a^2\right)=$ d) $3\cdot\left(5x^2\right)=$

e) $4\cdot(3-4x)=$ f) $(-2)\cdot\left(-ab^2\right)=$

g) $\left(3a^2\right)\cdot(7a)=$ h) $(2x)\cdot\left(3x^2\right)\cdot\left(x^3\right)=$

10. Simplifica, indicando los pasos intermedios, las siguientes expresiones:

a) $\frac{18a}{3b}=$ b) $\frac{12x^2}{4x}=$ c) $\frac{8x^2y}{3xy}=$

d) $\frac{-8x}{10x^2}=$ e) $\frac{18x^5}{4x^2}=$ f) $\frac{4x^2+4x}{4x}=$

Soluciones.

1. a) $A=b\cdot a$; $P=2b+2a$. 14 cm^2; 18 cm.

2. a) $a+b=34$. b) $y=x+3$. c) $x+(x+1)$. *d)* $3x=51$.

3. a) $x+(x+1)=71$. b) Hijo → *x*; padre → 4*x*. $x+4x=45$. c) $x+x^2=20$.

4. a) 5 y ab. b) –1 y x^3. c) $\frac{4}{3}$ y x^2y. d) 5 y x^2.

5. Son semejantes: a) y c). **6**. a) $10a$. b) a. c) –*x*. d) $2x^2$. f) $\frac{19}{9}x$.

7. a) $8x$. b) a^2. c) $2x+7$. d) $3x^2+3x$. e) $-x^2-x$. f) $\frac{1}{10}x$. **8.** a) $4a+3$. b) $-3x^2$. c) $2x+2$.

9. a) $15a^2$. b) $15a$. c) $-8a^3$. d) $15x^2$. e) $12-16x$. f) $2ab^2$. g) $21a^3$. h) $6x^6$.

10. a) $\frac{6a}{b}$. b) $3x$. c) $\frac{8x}{3}$. d) $\frac{-4}{5x}$. e) $\frac{9x^3}{2}$. f) $x+1$.

Tema 5. (II) Polinomios Resumen

Un polinomio es la suma de varios monomios. Si la suma es de dos monomios se le puede llamar binomio; si es suma de tres monomios, trinomio. Y en general, polinomio.

- Cada uno de los monomios que forman el polinomio se llama término. Como sabes, cada término está formado por una parte numérica (coeficiente) y por una parte literal.
- El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplos: a) Son binomios: $3a-5b$, $3x-7$; x^2+2x; $2x^3-\frac{3}{5}x$. El último es de grado 3.

b) Son trinomios: $-2ax+3a-5x$; $3x^2+2x-4$; $x^2-\frac{1}{3}x+2$. Los tres son de grado 2.

Polinomios en *x*. En matemáticas la mayoría de las veces se utiliza la letra *x*. Por eso, casi siempre se emplean polinomios como $4x^3+5x-6$ o $-2x^2+7x+3$; y con frecuencia se escriben así: $A(x)=4x^3+5x-6$ o $B(x)=-2x^2+7x+3$. La expresión más común es $P(x)$.

Ejemplo: La expresión $P(x)=2x^5-4x^3+5x-6$ es un polinomio de grado 5. Los términos que lo forman son: $2x^5$, de grado 5 y coeficiente 2; $-4x^3$, de grado 3 y coeficiente –4; $5x$, de grado 1 y coeficiente 5; el número –6 es el término independiente.
Ese polinomio no tiene los términos de 4º grado ni de 2º; pero, si conviene, podría escribirse así: $P(x)=2x^5+0x^4-4x^3++0x^2+5x-6$ → los coeficientes, ordenados de mayor a menor grado, son: 2 (para x^5), 0 (para x^4), –4 (para x^3), 0 (para x^2), 5 (para *x*); –6 (término independiente).

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que resulta cuando se sustituyen las letras por números.

Ejemplo: El valor numérico de $P(x)=5x^2+2x-4$ para *x* = 3 es

$5\cdot3^2+2\cdot3-4=45+6-4=47 \to P(3)=47$.

Y para *x* = –2 es: $5\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)-4=5\cdot4-4-4=20-8=12 \to P(-2)=12$.

Operaciones con polinomios

- Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se suman o restan los términos semejantes.

Ejemplos: Para los polinomios: $4x^3+5x-6$ y $3x^3-2x^2+7x$:
a) $\left(4x^3+5x-6\right)+\left(3x^3-2x^2+7x\right)=\left(4x^3+3x^3\right)-2x^2+\left(5x+7x\right)-6=7x^3-2x^2+12x-6$.
b) $\left(4x^3+5x-6\right)-\left(3x^3-2x^2+7x\right)=\left(4x^3-3x^3\right)-\left(-2x^2\right)+\left(5x-7x\right)-6=x^3+2x^2-2x-6$.
Observación: es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multiplicación de un polinomio por un monomio
Se multiplica cada término del polinomio por el monomio; para ello se utiliza la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación.

Ejemplo: $4x^2\cdot\left(3x^3-2x^2+7x\right)=\left(4x^2\cdot3x^3\right)+\left(4x^2\cdot\left(-2x^2\right)\right)+\left(4x^2\cdot7x\right)=12x^5-8x^4+28x^3$
Observación: es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multiplicación de dos polinomios
Se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo: “todos por todos”. Esto es, se aplica la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación. Una vez realizados los productos deben agruparse los términos semejantes.

Ejemplos:

a) $(5x-6)\cdot(2x^2-3x+1)=(5x)\cdot(2x^2-3x+1)-6\cdot(2x^2-3x+1)=$
$= (5x\cdot 2x^2)+(5x\cdot(-3x))+(5x\cdot 1)-(6\cdot 2x^2)-(6\cdot(-3x))-(6\cdot 1)=$
$= 10x^3-15x^2+5x-12x^2+18x-6=10x^3-27x^2+23x-6$.

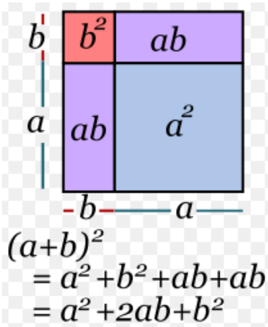
b) $(4x^3+5x-6)\cdot(3x^3-2x^2+7x)=(4x^3\cdot 3x^3)+(4x^3\cdot(-2x^2))+(4x^3\cdot 7x)+$
$+(5x\cdot 3x^3)+(5x\cdot(-2x^2))+(5x\cdot 7x)-(6\cdot 3x^3)-(6\cdot(-2x^2))-(6\cdot 7x)=$
$= 12x^6-8x^5+28x^4+15x^4-10x^3+35x^2-18x^3+12x^2-42x=$
$= 12x^6-8x^5+43x^4-28x^3+47x^2-42x$.

Observaciones: 1) Cuando una expresión algebraica no cabe en una línea debe “romperse” por un signo + o –, nunca por un producto.
2) Es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos, tanto al multiplicar como al sumar; y las propiedades de las operaciones con potencias.

Productos notables:

Cuadrado de una suma: $(a+b)^2$
Multiplicando como dos polinomios:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2+2ab+b^2 \rightarrow$$
$$\underline{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$



Ejemplos:

a) $(3x+5)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5+5^2=9x^2+30x+25$.

b) $(x^2+1)^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 1+1^2=x^4+2x^2+1$.

Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2$
Multiplicando como dos polinomios:

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot a+a\cdot(-b)-b\cdot a-b\cdot(-b)=a^2-2ab+b^2 \rightarrow \underline{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

Ejemplos:

a) $(4x-3)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3+3^2=16x^2-24x+9$.

b) $(5-x^2)^2=5^2-2\cdot 5\cdot x^2+(x^2)^2=25-10x^2+x^4$.

Suma por diferencia: $(a+b)\cdot(a-b)$
Multiplicando como dos polinomios:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot a+a\cdot(-b)+b\cdot a+b(-b)=a^2-b^2 \rightarrow \underline{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}$$

Ejemplos:

a) $(4x+3)\cdot(4x-3)=(4x)^2-3^2=16x^2-9$.

b) $(2+x^2)\cdot(2-x^2)^2=2^2-(x^2)^2=4-x^4$.

Tema 5. (II) Polinomios   Ejercicios

1. Indica el grado y los coeficientes de cada término, ordenados de mayor a menor, de los siguientes polinomios:

	grado	coeficientes
a) x^2-3x+5		
b) $-x+3$		
c) $2x^3-3x$		
d) $3x^4+2x^2-4x+1$		

2. Halla el valor numérico de cada uno de los polinomios anteriores para $x = 1$, $x = -2$ y $x = 0$.

	$x = 1$	$x = -2$	$x = 0$
a) x^2-3x+5			
b) $-x+3$			
c) $2x^3-3x$			
d) $3x^4+2x^2-4x+1$			

3. Halla las siguientes sumas y restas de polinomios:

a) $(5x+6)+(3x+9)=$

b) $(5x+6)-(3x+9)=$

c) $(3x^2+2x+7)+(4x-5)=$

d) $(3x^2+2x+7)-(4x-5)=$

e) $(4x^2+5x-6)-(2x^2-3x)=$

4. Dados los polinomios: $A(x)=2x^2-5x+6$; $B(x)=3x^3-2x^2+7x-1$; $C(x)=x^2+3x-2$, halla:

a) $A(x)+B(x)=$

b) $A(x)-B(x)+C(x)=$

5. Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $2(4x^3+5x-6)=$

b) $4(3x^2+5x-6)-3(3x^2-2)=$

6. Calcula:

a) $5x^2\cdot(2x^2-4x+3)=$

b) $(5x^2)\cdot(-x^3)(4x-3)=$

7. Halla:

a) $(x+3)\cdot(x+5)$ =

b) $(x+4)\cdot(x-5)$ =

c) $(x-3)\cdot(x-2)$ =

d) $(5x+6)\cdot(4x-5)$ =

e) $(2x^2-3)\cdot(3x-7)$ =

f) $(-5x+3)\cdot(4x^2+7x)$ =

8. Dados los polinomios: $P(x)=2x^2+3x-4$; $Q(x)=7x-2$; $R(x)=x^2-5x+3$, halla:

a) $P(x)\cdot Q(x)$ =

b) $P(x)\cdot R(x)$ =

c) $Q(x)\cdot R(x)$ =

9. Halla, multiplicando término a término; después comprueba que aplicando la fórmula correspondiente, el resultado es el mismo.

a) $(2x+5)^2$ = $(2x+5)\cdot(2x+5)=2x\cdot 2x+2x\cdot 5+5\cdot 2x+5\cdot 5=4x^2+10x+10x+25=4x^2+20x+25$.

$\rightarrow$ $(2x+5)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 5+5^2=2^2\cdot x^2+20x+25=4x^2+20x+25$.

b) $(x^2+3)^2$ =

$\rightarrow$

c) $(2x-3)^2$ =

$\rightarrow$

d) $(x^2-2)^2$ =

$\rightarrow$

e) $(x+5)\cdot(x-5)$ =

$\rightarrow$

f) $(x-3)\cdot(x+3)$ =

$\rightarrow$

Soluciones.

1. a) 2; 1, –3, 5. b) 1; –1, 3. c) 3; 2, 0, –3, 0. d) 4; 3, 0, 2, –4, 1.

2. a) x = 1 → 3; x = –2 → 15; x = 0 → 5. b) 2; 5; 3. c) –1; –10; 0. d) 2; 65; 1.

3. a) $8x+15$. b) $2x-3$. c) $3x^2+6x+2$. d) $3x^2-2x+12$. e) $2x^2+8x-6$.

4. a) $3x^2+2x+5$. b) $-3x^3+5x^2-9x+5$. **5**. a) $8x^3+10x-12$. b) $3x^2+20x-18$.

6. a) $10x^4-20x^3+15x$. b) $-20x^6+15x^5$.

7. a) $x^2+8x+15$. b) x^2-x-20. c) x^2-5x+6. d) $20x^2-x-30$. e) $6x^3-14x^2-9x+21$. f) $-20x^3-23x^2+21x$.

8. a) $14x^3+17x^2-34x+8$. b) $2x^4-7x^3-13x^2+29x-12$. c) $7x^3-37x^2+31x-6$.

9. a) $4x^2+2x+25$. b) x^4+6x^2+9. c) $4x^2-12x+9$. d) x^4-4x^2+4. e) x^2-25. f) x^2-9.

Tema 6. Ecuaciones de primer grado — Resumen

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante las operaciones algebraicas.
En las ecuaciones las letras se llaman incógnitas. La incógnita preferida suele ser la letra *x*.

Ejemplos. Son ecuaciones las igualdades siguientes: $2x = 34$; $x^2 = 25$; $x + \frac{x}{2} = 30$.

- Las ecuaciones se emplean para resolver problemas, pues al establecer la relación entre los datos y el valor desconocido (la *x*) suele obtenerse una igualdad.

Ejemplo: Al intentar encontrar el número que cumple la relación: "un número más su mitad vale 30", se obtiene una ecuación, pues si a ese número le llamamos *x*, entonces $x + \frac{x}{2} = 30$.

- Las ecuaciones se clasifican por su grado y por su número de incógnitas. La ecuación $2x = 34$ es de primer grado; $x^2 = 25$ es una ecuación de segundo grado.
- Soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que cumplen la ecuación.

Ejemplo: La ecuación $2x = 34$ se cumple para x = 17, pues 2 · 17 = 34. La ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: $x = 5$ y $x = -5$, pues $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.
Ejemplos: Los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes:

a) $2x = 18$ y $4x = 36$ b) $2x + 3 = x + 7$ y $2x = x + 4$ c) $x + \frac{x}{2} = 30$ y $2x + x = 60$

Puedes comprobar que la solución de las dos primeras es $x = 9$; que la solución de las dos segundas es $x = 4$; y que la solución de las dos últimas es $x = 20$. (Compruébalo).

Resolución de una ecuación

- Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones. Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita.
- Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que encontrar su solución sea fácil.
- Las transformaciones que pueden hacerse en una ecuación son dos:
  1. Sumar el mismo número (la misma cosa) a los dos miembros de la igualdad. Lo que se pretende con esta transformación es cambiar los términos de un lado al otro de la igualdad. Esto se llama transposición de términos.
  2. Multiplicar (o dividir) por un mismo número los dos miembros de la igualdad. Lo que se pretende con esta transformación es quitar los denominadores de la ecuación.

Ejemplos: a) La ecuación $2x - 3 = x + 7$ puede trasformarse como sigue:
→ Se suma 3 a cada miembro → $2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow 2x - 3 + 3 = x + 7 + 3 \Rightarrow 2x = x + 10$
→ Se resta x a cada miembro → $2x - x = x + 10 - x \Leftrightarrow x = 10$.
Así se consigue despejar la *x*; esto es, determinar su solución. En este caso, $x = 10$.

b) La ecuación $\frac{x-2}{5} = 1$ se transforma así:

→ Se multiplica por 5 cada miembro ⇒ $\frac{x-2}{5} \cdot 5 = 1 \cdot 5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$.

→ Se suma 2 a cada miembro → $x - 2 + 2 = 5 + 2 \rightarrow x = 7$.
La solución de la ecuación es $x = 7$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: transposición de términos

1. Ecuación $x + a = b$. Se resuelve restando *a* a ambos miembros. Queda: $x = b - a$.
Ejemplos: a) $x + 5 = 8$ → restando 5 se tiene: $x = 8 - 5 \Rightarrow x = 3$.
b) $x + 2 = -3$ → restando 2 se tiene: $x = -3 - 2 \Rightarrow x = -5$.

2. Ecuación $x - a = b$. Se resuelve sumando *a* a ambos miembros. Queda: $x = b + a$.
Ejemplos: a) $x - 3 = 6$ → sumando 3 se tiene: $x = 6 + 3 = 9$. La solución es $x = 9$.
b) $x - 4 = 0$ → sumando 4 se tiene: $x = 0 + 4 = 4$. La solución es $x = 4$.

Observa:
Lo que está restando en un miembro, pasa sumando al otro miembro: $x + a = b \Rightarrow x = b - a$.
Lo que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro: $x - a = b \Rightarrow x = b + a$.

3. Ecuación $ax = b$. Se resuelve dividiendo por *a* ambos miembros. Queda: $x = \frac{b}{a}$.

Ejemplos: a) $2x = 34$ → dividiendo por 2 se tiene: $x = \frac{34}{2} = 17$. La solución es. $x = 17$.

b) $2x = -3$ → dividiendo por 2 se tiene: $x = \frac{-3}{2} = -1{,}5$. La solución es $x = -1{,}5$

4. Ecuación $\frac{x}{a} = b$. Se resuelve multiplicando por *a* ambos miembros. Queda: $x = ab$.

Ejemplos: a) $\frac{x}{3} = 2$ → multiplicando por 3 se tiene: $x = 2 \cdot 3 = 6$. La solución es $x = 6$.

b) $\frac{x}{5} = -1$ → multiplicando por 5 se tiene: $x = -1 \cdot 5 = -5$. La solución es $x = -5$.

Observa:
Lo que está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro miembro; y lo que está dividiendo, pasa multiplicando. Esto es: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$; $\frac{x}{a} = b \Rightarrow x = ab$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: caso general

Se pueden resolver aplicando los pasos siguientes:

1. Si hay paréntesis, se resuelven. Hay que tener en cuenta las reglas de los signos.
2. Si hay denominadores, se quitan. Para quitarlos hay que multiplicar todos los términos por el m.c.m. de los denominadores.
3. Se pasan (transponen) las *x* a un miembro y los números al otro miembro: lo que está sumando, pasa restando; lo que está restando, pasa sumando. Se agrupan: se suman.
4. Se despeja la *x*: lo que multiplica a la *x* pasa dividiendo al otro miembro; lo que divide a la *x*, pasa multiplicando al otro miembro.

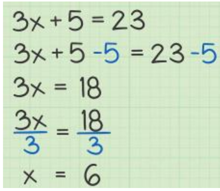
Ejemplos:

a) $3x - 5 + 2x = 4 - 6x + 7 + x \Rightarrow 3x + 2x + 6x - x = 4 + 7 + 5 \Rightarrow 10x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{10} = 1{,}6$.

b) $3 - 4x - (2x - 5) = 14 - 9x \Rightarrow 3 - 4x - 2x + 5 = 14 - 9x \Rightarrow -4x - 2x + 9x = 14 - 3 - 5 \Rightarrow$
$3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$.

Tema 6. Ecuaciones de primer grado — Ejercicios

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:



a)2 $x+10=8 \Rightarrow$

b) $3x-5=-20 \Rightarrow$

c)2 $3-4x=3 \Rightarrow$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x-5+2x+3=x \Rightarrow$

b) $3(x-5)=9 \Rightarrow$

c) $2-4x=3x-5 \Rightarrow$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x-(5+2x)+5=x \Rightarrow$

b) $3(x-5)=6-2(x-3) \Rightarrow$

c) $2x-4(x-1)=-3x+9 \Rightarrow$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{2}=5 \Rightarrow$

b) $\dfrac{x-2}{4}=-1 \Rightarrow$

c) $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow$

d) $\dfrac{x}{3}=0 \Rightarrow$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3x}{2}+2=5 \Rightarrow$

b) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{2x-5}{3} \Rightarrow$

c) $\dfrac{3x}{2}-4=0 \Rightarrow$

d) $\dfrac{2x}{3}=5-x \Rightarrow$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{5x-6}{2}=2x+3 \Rightarrow$

b) $\dfrac{3x}{2}-2x+2=5 \Rightarrow$

c) $\dfrac{x}{4}+3=2-(1+x) \Rightarrow$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}-\frac{4x}{3}=\frac{7}{6} \Rightarrow$

b) $\frac{x}{4}+3=2-\frac{x-2}{2} \Rightarrow$

8. Resuelve las ecuaciones:

a) $2x-3(2-x)=5+x \Rightarrow$

b) $3-2(2x+3)=3(2-5x)+2 \Rightarrow$

9. Resuelve:

a) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{3}=\frac{14}{3} \Rightarrow$

b) $\frac{2x}{5}+\frac{x}{3}=\frac{4}{3} \Rightarrow$

c) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{3}=\frac{4}{3}+x \Rightarrow$

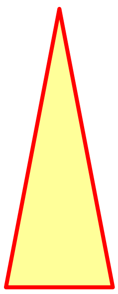
10. Resuelve:

a) $\frac{4x}{5}-2\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{6}\right)=3 \Rightarrow$

b) $\frac{4x}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{6}\right)=3\left(x-\frac{7}{3}\right) \Rightarrow$

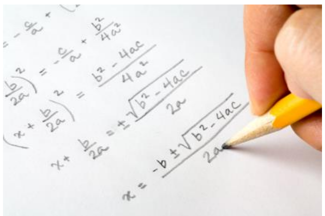
11. La edad de Pedro es la cuarta parte de la de su padre. Si la suma de sus edades es 50, ¿cuántos años tiene cada uno?

12. Los lados iguales de un triángulo isósceles son tres veces más largos que su base. Si el perímetro del triángulo es 140 cm, ¿cuánto miden sus lados?



Soluciones:
1. a) −1. b) −5. c) 5. **2**. a) 1/2. b) 8. c) 1. **3**. a) 0. b) 27/5. c) 5. **4**. a) 10. b) −2. c) 1/2. d) 0.
5. a) 2. b) 4. c) 8/3. d) 3. **6**. a) 12. b) −6. c) 16/5. **7**. a) 7/10. b) 0.
8. a) $x=\frac{11}{4}$. b) x = 1. **9**. a) x = 2. b) $x=\frac{20}{11}$. c) $x=-\frac{10}{7}$. **10**. a) $x=\frac{65}{2}$. b) $x=\frac{101}{35}$.
11. Pedro, 10; Padre, 40 años. **12**. Base, 20; lados, 60 cada uno.

Tema 6. (II) Ecuaciones de segundo grado — Resumen



Ecuaciones de segundo grado

La ecuación en su forma estándar es $ax^2 + bx + c = 0$.
(Donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$).

Ejemplos: Son ecuaciones de segundo grado:
a) $2x^2 + 4x - 6 = 0$. b) $x^2 + 4x + 4 = 0$. c) $x^2 - 4x + 6 = 0$.

- Sus soluciones se hallan aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplos: Las soluciones de las ecuaciones anteriores son:

a) $2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \dfrac{-4 \pm 8}{4}$.

Por tanto: $x_1 = \dfrac{-4-8}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3$ y $x_2 = \dfrac{-4+8}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$. Las soluciones son: $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$.

b) $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$. Sólo tiene una solución, $x = -2$.

c) $x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} \Rightarrow$ No tiene solución, pues la raíz de un número negativo no existe.

Ecuación incompleta de segundo grado

Es de la forma:
(1) $ax^2 + c = 0$, $b = 0$. (2) $ax^2 + bx = 0$, $c = 0$.

Ejemplos: Son ecuaciones incompletas de segundo grado:
a) $x^2 - 9 = 0$. b) $2x^2 - 32 = 0$. c) $x^2 - 4x = 0$. d) $3x^2 + 6x = 0$.

- Para hallar las soluciones de una ecuación incompleta no es preciso recurrir a la fórmula anterior (aunque pueden resolverse aplicándola).

Ejemplos: Las soluciones de las ecuaciones anteriores son:

a) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow$ (despejando x^2) $\Rightarrow x^2 = 9 \rightarrow$ (haciendo la raíz cuadrada) $\Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$.
Las soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$.

b) $2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4$. Soluciones: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

c) $x^2 - 4x = 0 \longrightarrow$ (sacando factor común) $\Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.
Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.
(Recuerda: para que un producto valga 0 alguno de sus factores debe valer 0. En la igualdad anterior, los factores son x y $x - 4$).

d) $3x^2 + 6x = 0 \longrightarrow$ (sacando factor común) $\Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x + 2 = 0 \Rightarrow$ $x = -2$. Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$.

Tema 6. (II) Ecuaciones de segundo grado Ejercicios

1. Asocia, entre los valores que se indican, las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ → $x = 1$; $x = 2$; $x = -6$; $x = 0$.

→ $x = 1$: $1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ es sol. → $x = 2$: $2^2 + 5 \cdot 2 - 6 \neq 0 \Rightarrow x = 2$ no es sol.

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$ → $x = 1$; $x = 2$; $x = 0$; $x = 4$.

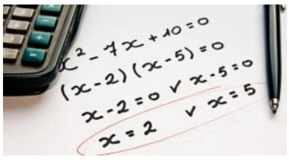
c) $x^2 - 4x = 0$ → $x = 1$; $x = 2$; $x = 0$; $x = 4$.

d) $x^2 - 49 = 0$ → $x = 6$; $x = 7$; $x = 0$; $x = -7$.

2. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow$



c) $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

d) $3x^2 + 6x - 24 = 0 \Rightarrow$

3. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $x^2 - x = 0 \Rightarrow$

b) $x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$

c) $2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow$

d) $3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$

4. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

b) $x^2 - 100 = 0 \Rightarrow$

c) $2x^2 - 72 = 0 \Rightarrow$

d) $3x^2 - 48 = 0 \Rightarrow$

5. Las siguientes ecuaciones está desordenadas. Ordénalas antes de resolverlas.

a) $x^2 = x + 12 \Rightarrow$

b) $x^2 + 9 = -6x \Rightarrow$

c) $130 - 4x^2 = -14 \Rightarrow$

d) $5x = x^2 \Rightarrow$

6. Opera las siguientes expresiones algebraicas y después resuelve la ecuación obtenida.

a) $x^2 = \dfrac{x}{2} + 3 \Rightarrow$

b) $x(x-5) = 6 \Rightarrow$

c) $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Rightarrow$

d) $(x-1)\cdot(x+3) - 5x = 7 \Rightarrow$

7. El producto de dos números enteros consecutivos es 72. Plantea una ecuación de segundo grado para hallarlos. ¿De qué números se trata?

8. El área de un rectángulo es 391 dam^2. Si la base es 6 decámetros (dam) más larga que ancha, ¿cuánto mide de larga y cuánto de ancha?

Soluciones:
1. a) $x = 1$; $x = -6$. b) $x = 2$; $x = 4$. c) $x = 0$; $x = 4$. d) $x = 7$; $x = -7$.
2. a) $x = -1$; $x = 2$. b) $x = 3$, doble. c) $x = 2$; $x = 5$. d) $x = 2$; $x = -4$.
3. a) $x = 0$; $x = 1$. b) $x = 0$; $x = 6$. c) $x = 0$; $x = 4$. d) $x = 0$; $x = -2$.
4. a) $x = -1$; $x = 1$. b) $x = -10$; $x = 10$. c) $x = -6$; $x = 6$. d) $x = -4$; $x = 4$.
5. a) $x = -3$; $x = 4$. b) $x = 3$, doble. c) $x = -6$; $x = 6$. d) $x = 0$; $x = 5$.
6. a) $x = -3/2$; $x = 2$. b) $x = -1$; $x = 6$. c) $x = 1$, doble. d) $x = -2$; $x = 5$.
7. $x = -9$ y $x = -8$; $x = 8$ y $x = 9$. **8**. 23 × 17 dam.

Tema 6. Problemas de ecuaciones de primero y segundo grado

Llámale *x*

La x es la letra más famosa entre los números.
La letra x suele emplearse para sustituir a un número del que no se sabe su valor.
La letra x puede designar la edad de una persona;
La letra x puede ser la longitud de la base de un triángulo;
La letra x puede indicar la distancia entre dos puntos;
La letra x puede designar la capacidad de un depósito, el precio de un determinado producto…

En la resolución de problemas, siempre que no sepas cuánto vale una cosa, llámale x.

Con relación a las operaciones, la letra x se maneja exactamente igual que un número. Así, por ejemplo:
El doble de x es $2x$, que significa $2 \cdot x$. Por tanto, si x valiese 8, $2x$ valdría 16.

La mitad de x es $x:2=\frac{x}{2} \rightarrow$ Si x valiese 100, $\frac{x}{2}$ valdría 50.

El cuadrado de x es x^2, que significa $x \cdot x \rightarrow$ si x valiese 7, $x^2 = 7 \cdot 7 = 49$.

La suma $2x+5x$ es igual a $7x$. Igualmente: $\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}x=\frac{8}{3}x$.

Por lo mismo: $x-\frac{x}{3}=\frac{x}{1}-\frac{x}{3}=\frac{3x}{3}-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$.

En consecuencia, no tengas miedo a la x; trátala como tratarías a cualquier número, pero trátala bien. Fíjate cómo puede tratarse en los siguientes problemas.

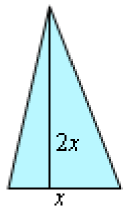
Problema 1

La base de un triángulo es doble que su altura. Si su área mide 400 cm^2, ¿cuánto vale su base?

¿Sabes la longitud de la base? No. Pues, llámale $x \rightarrow$ entonces, su altura valdrá $2 \cdot x$.
Como el área de un triángulo es igual a "base por altura partido por 2":

$A=\frac{base \cdot altura}{2}$, se debe cumplir que $400=\frac{x \cdot 2x}{2} \Rightarrow 400=\frac{2 \cdot x^2}{2}=x^2 \Rightarrow$

$x=\sqrt{400}=20$.



Por tanto, la base medirá 20 cm; y la altura el doble, 40 cm.

Problema 2

Un depósito se está llenando de agua. Si cuando el depósito está lleno hasta un sexto de su capacidad se le añaden 130 litros, entonces se llena hasta los tres quintos, ¿cuál es la capacidad del depósito?

Llamamos x a la capacidad del depósito.

Cuando está lleno hasta un sexto de su capacidad tendrá $\frac{1}{6}x$.

Si se le añaden 130 litros, tendrá $\frac{1}{6}x+130$. Pero entonces se llena hasta los tres quintos: $\frac{3}{5}x$.

Por tanto, se cumple que:

$$\frac{1}{6}x+130=\frac{3}{5}x \Leftrightarrow (\times 30) \rightarrow 5x+3900=18x \Leftrightarrow 13x=3900 \Rightarrow x=300.$$

Tema 6. Problemas de ecuaciones de primero y segundo grado

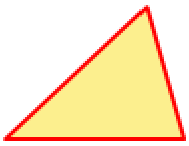
1. Si a un número se le resta su tercera parte el resultado es 40. ¿Cuál es ese número?

2. La edad de Pedro es la cuarta parte de la su padre. Si la suma de sus edades es 50, ¿cuántos años tiene cada uno?

3. Un poste está clavado en el suelo. La parte enterrada es 1/10 de su longitud. Si la parte visible mide 126 cm, halla, planteando una ecuación, la longitud total del poste. (Haz un dibujo apropiado).

4. Escribe la expresión algebraica asociada al enunciado: "un número menos su mitad vale 30". ¿De qué número se trata?

5. La medida en grados de los tres ángulos de un triángulo viene dada por tres múltiplos consecutivos de 10. Plantea una ecuación que te permita hallar lo que mide cada ángulo. ¿Cuánto mide el menor de ellos?



6. Calcula los ángulos de un triángulo isósceles, sabiendo que el ángulo desigual es 30º más pequeño que los otros dos.

7. Si a cierto número le restas siete unidades te da lo mismo que si lo divides por 5. ¿De qué número se trata?

8. En una clase hay 35 alumnos. Si hay cinco chicos por cada dos chicas. ¿Cuántos chicos y chicas hay?

9. A una cuba de vino, inicialmente llena, se le extrae un sexto de su capacidad más 15 litros. Si añadiendo un cuarto de su capacidad éste vuelve a llenarse, ¿cuántos litros caben en la cuba?

10. Se han mezclado dos tipos de vino, uno que cuesta 4 euros el litro con otro de 5 euros el litro. Si la mezcla sale a 4,20 euros el litro, ¿cuántos litros se han empleado del más caro si del más barato se han empleado 40?

11. Se han mezclado *x* litros de vino, que cuesta 4 euros el litro, con 20 litros de vino que cuesta a 5 euros el litro. Si la mezcla sale a 4,25 €/litro, ¿cuántos litros se han empleado del primer vino?

12. Descompón el número 10 en dos sumandos positivos de manera que el cuadrado del mayor más el doble del menor valga 68.

13. La suma de los cuadrados de la edad actual y de la que tendrá dentro de dos años un muchacho es de 580. ¿Cuántos años tiene el chico?

14. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 221. ¿Qué números son?

15. Si a los lados de un cuadrado se le añaden 2 cm, su área aumenta en 44 cm^2. ¿Cuánto medía el lado inicial?

Soluciones.

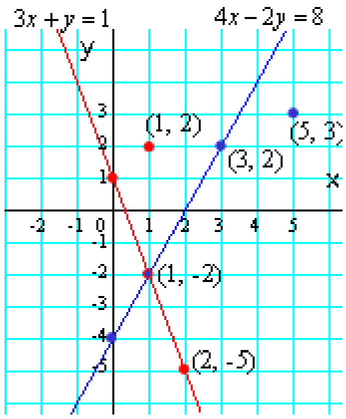
1. 60. **2**. Pedro, 10; Padre, 40 años. **3**. 140 cm. **4.** 45. **5**. 50º. **6**. 40º, 70º y 70º.
7. 1,75. **8**. 25 chicos; 10 chicas. **9**. 180 litros. **10**. 10 litros. **11**. 60 litros.
12. 8 + 2. **13**. 18. **14**. 10 y 11. **15**. 10 cm.

Tema 7. Sistemas de ecuaciones lineales **Resumen**

<u>Ecuaciones de primer grado con una incógnita</u>. Son expresiones de la forma $ax+by=c$. Las incógnitas son *x* e *y*, mientras que *a*, *b* y *c* son números.

- La solución de estas ecuaciones son pares de valores (uno para *x* y otro para *y*) que cumplen la ecuación.

Ejemplos:



a) $4x-2y=8$. El par *x* = 3 e *y* = 2 es solución, pues 4 · 3 – 2 · 2 = 8. También es solución el par *x* = 1 e *y* = –2. El par *x* = 5 e *y* = 3 no es solución de esa ecuación, pues 4 · 5 – 2 · 3 = 14 $\neq$ 8.
b) La ecuación $3x+y=1$ tiene por soluciones *x* = 2 e *y* = –5; *x* = 1 e *y* = –2, e infinitos pares más. El par *x* = 1 e *y* = 2 no es solución de ella.

- Una ecuación con dos incógnitas tiene infinitos pares de soluciones. Esos pares se corresponden con los puntos de una recta.

<u>Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas</u>.

Su forma más simple es $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

- La solución de un sistema es el par de valores de *x* e *y* que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Ejemplo: Las dos ecuaciones del ejemplo anterior determinan el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$. Su solución es *x* = 1 e *y* = –2, ya que ese par es solución de ambas ecuaciones.

- Como puede verse, los valores solución, *x* = 1 e *y* = –2, se corresponden con las coordenadas del punto (1, –2), que es el de corte de las rectas asociadas a cada una de las ecuaciones.

- Hay varios métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción.

<u>Sustitución</u>: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y su valor se sustituye en la otra ecuación. Se obtiene una nueva ecuación, cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: Para resolver el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$:

1º. Se despeja *y* en la segunda ecuación ($y=1-3x$).
2º. Se lleva (se sustituye) su valor a la primera ecuación: $4x-2(1-3x)=8$.
3º. Se resuelve la nueva ecuación: $4x-2(1-3x)=8 \Rightarrow 4x-2+6x=8 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$.
4º. El valor *x* = 1 se lleva a la ecuación despejada: $y=1-3\cdot 1=-2$.
La solución del sistema es: *x* = 1 e *y* = –2.

<u>Igualación</u>: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

Ejemplo: En el mismo sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$, puede despejarse la incógnita *y* en las dos ecuaciones. Se obtiene: $\begin{cases} 4x-8=2y \\ y=1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=y \\ y=1-3x \end{cases}$.

Igualando: $2x-4=1-3x \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$.
El valor *x* = 1 se lleva a la cualquiera de las ecuaciones: $y=1-3\cdot1=-2$.
La solución del sistema es: *x* = 1 e *y* = –2.

Reducción: Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: En el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$, si se multiplica la segunda ecuación por 2, queda:

$\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones, término a término, se obtiene $10x=10 \Rightarrow x=1$.

Ese valor *x* = 1 se sustituye en cualquiera de las ecuaciones; se obtiene *y* = –2.

Observación: Los sistemas que no tiene solución se llaman incompatibles.

Resolución de problemas con ayuda de sistemas: llámale *x*; llámale *y*.
La aplicación de sistemas es necesaria cuando en un problema hay dos incógnitas. A una de esas incógnitas se le llama *x*, a la otra *y*.
Para resolver un problema, debes:
1.º Leer detenidamente el problema: saber qué datos te dan y lo que te piden encontrar.
2.º Descubrir las relaciones entre los datos y las incógnitas. Escribir esas relaciones en forma de igualdad. Con las ecuaciones halladas se forma un sistema.
3.º Resolver ese sistema.
4.º Comprobar que la solución obtenida es correcta.

Ejemplo: En una granja, entre gallinas y conejos hay 72 cabezas y 184 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Se desconoce el número de gallinas y el número de conejos. Si se llama *x* al número de gallinas, e *y* al de conejos, debe cumplirse: $x+y=72$ → gallinas + conejos = 72.
Cada gallinas tiene 2 patas ⇒ entre las *x* gallinas tendrán 2*x* patas.
Cada conejo tiene 4 patas ⇒ entre los *y* conejos tendrán 4*y* patas.
En total hay 184 patas: $2x+4y=184$.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x+y=72 \\ 2x+4y=184 \end{cases}$.

Multiplicando por 4 la primera ecuación se tiene: $\begin{cases} 4x+4y=288 \\ 2x+4y=184 \end{cases}$ ⇒ (restando)

⇒ $2x=104$ ⇒ *x* = 52 → (sustituyendo *x* = 52 en la primera ecuación) → *y* = 20.
Por tanto, en la granja hay 52 gallinas y 20 conejos.

- Comprobación:

Número de cabezas: 52 + 20 = 72 → de acuerdo con el enunciado.
Número de patas: 52 · 2 + 20 · 4 = 104 + 80 = 184 → de acuerdo con el enunciado.

Tema 7. Sistemas de ecuaciones lineales — Ejercicios

1. Da tres pares de soluciones de las siguientes ecuaciones:

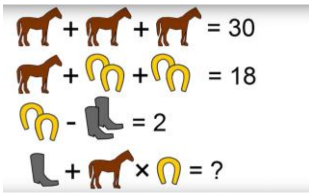
a) $x + y = 7 \rightarrow$

b) $2x - y = 8 \rightarrow$

c) $-3x + y = 0 \rightarrow$

d) $\frac{2}{3}x + 2y = 4 \rightarrow$

Extra 1



2. Para las ecuaciones anteriores, indica la ecuación de la que es solución alguno de los siguientes partes (Justifícalo haciendo la comprobación):

a) (3, 1) $\rightarrow$ d) $\frac{2}{3}\cdot 3 + 2\cdot 1 = 2 + 2 = 4$.

b) (10, –3) $\rightarrow$

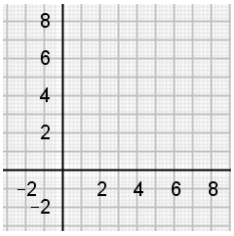
c) (1, 3) $\rightarrow$

d) (3, –2) $\rightarrow$

3. Representa gráficamente las rectas asociadas a las ecuaciones

a) $x + y = 7$ y $2x - y = 8$.

¿Hay alguna solución común?



4. Resuelve el sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ por los tres métodos. Comprueba que la solución es la misma.

Sustitución	Igualación	Reducción

5. Resuelve por sustitución los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow$

Se sustituye en la segunda ecuación:

$2x - (5 - 2x) = 7 \Rightarrow$

b) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow$

6. Resuelve por igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \rightarrow$

b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow$

7. Resuelve por reducción los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \rightarrow$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases} \rightarrow$

8. Halla dos números sabiendo que su suma es 87 y su diferencia 25.

Extra 2

Elena dice: "dame 5 € y tendremos el mismo dinero", y Javier dice: "dame 10 € y tendré el doble que tú"...

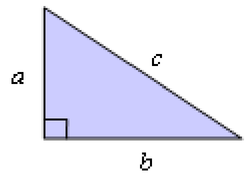
9. Pedro lleva billetes de 5 € y de 10 €. En total son 23 billetes, que suponen 145 euros. ¿Cuántos billetes tiene de cada cantidad?

10. Un estudiante realiza un examen de tipo test. Por cada respuesta acertada recibe 3 puntos, pero por cada error se le restan 2 puntos. Si ha contestado a 50 preguntas y su calificación ha sido de 95 puntos, ¿cuántas respuestas contesto correctamente?

11. En una caja hay peras y manzanas. Si se quitan tres peras y se reemplazan por tres manzanas, la razón de peras y manzanas es de 1 a 1. Si se quitan tres manzanas y se reemplazan por tres peras, la razón de peras y manzanas es de 13 a 7. ¿Cuántas manzanas hay en la caja?

Soluciones: **1**. Hay infinitos pares. Por ejemplo: a) (0, 7), (1, 6), (2, 5); b) (0, –8), (4, 0), (3, –2); c) (0, 0), (1, 3), (2, 6); d) (0, 2), (3, 1), (6, 0). **Extra 1**, 13. **2**. Respectivamente: d), a), c), b). **3**. Sol. (5, 2). **4**. $x = 5$; $y = 2$. **5**. a) (3, –1); b) (5, 1); c) (0, 2). **6**. a) (1, 3); b) (2, –1). **7**. a) (5, –3); b) (1, –1). **8**. 56 y 31. **Extra 2,** 40 y 50 €. **9**. 13 de 5 € y 8 de 10 €. **10**. 39 aciertos; 11 fallos. **11**. 23 peras y 17 manzanas.

Tema 8. (I) Geometría. Teorema de Pitágoras **Resumen**



Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Esto es: $c^2 = a^2 + b^2$.

Ejemplo:

Si a = 3 y b = 4, el lado c cumple que $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$.

- Igualmente, si los lados, a, b y c, de un triángulo verifican la relación $c^2 = a^2 + b^2$, siendo c el de mayor longitud, el triángulo es rectángulo.

Ejemplos:

a) El triángulo de lados 12, 9 y 8 no es rectángulo, pues $12^2 \neq 9^2 + 8^2$, ya que

$$12^2 = 144 \neq 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145.$$

b) El triángulo de lados 17, 15 y 8 sí es rectángulo, pues $17^2 = 15^2 + 8^2$, ya que

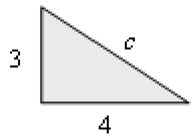
$$17^2 = 289 = 225 + 64 = 15^2 + 8^2.$$

- El teorema de Pitágoras permite conocer un lado desconocido de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los otros dos, pues:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2$$

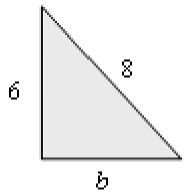
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Ejemplos:



a) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa, c, cumple que:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5.$$



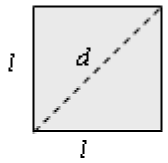
b) Si la hipotenusa vale c = 8 cm y un cateto vale a = 6 cm, el otro cateto, b, cumple:

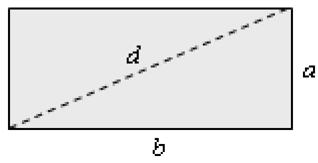
$$(b^2 = c^2 - a^2) \Rightarrow b^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28} \approx 5{,}29.$$

Algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras

En muchas figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, triángulos…), el teorema de Pitágoras permite calcular diagonales, lados, alturas, apotemas… Para ello, en todos los casos, hay que construir el triángulo rectángulo apropiado.

- En los cuadrados y en los rectángulos puede hallarse la diagonal cuando se conocen los lados.





En el cuadrado: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot l$.

También podría hallarse el lado conociendo la diagonal.

En el rectángulo: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

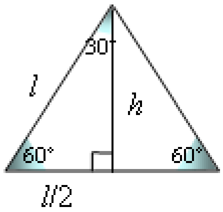
También podría hallarse un lado conociendo la diagonal y el otro lado.

Ejemplos:

a) Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, su diagonal es $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}48$.

b) Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su base mide 8 cm, entonces puede calcularse su altura, y vale: $a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = 6$ cm.

- En un triángulo equilátero, para cualquier vértice, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del lado (de la base). Por tanto, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



Esto es: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}\cdot l}{2}$.

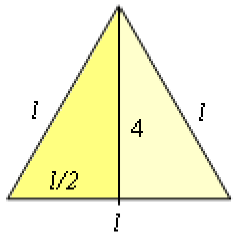
Por lo mismo, conociendo la altura puede calcularse la medida del lado.

Ejemplos:

a) Si el lado de un triángulo equilátero mide 15 cm, su altura valdrá:

$$h = \frac{\sqrt{3}\cdot 15}{2} \approx 13 \text{ cm.}$$

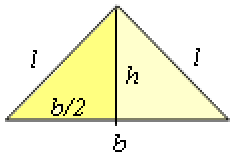
b) Si la altura de un triángulo equilátero mide 4 cm, entonces:



$$l^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 16 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow 4l^2 = 64 + l^2 \Rightarrow 3l^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4{,}61 \text{ cm.}$$

- En un triángulo isósceles la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del otro lado. Por tanto, conociendo los lados, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.

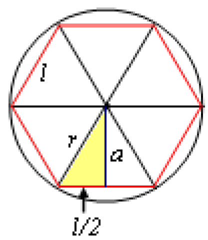


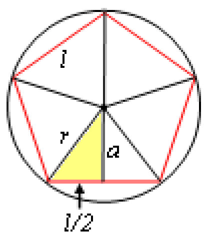
Ejemplo:

Si en el triángulo adjunto el lado l = 5 cm y la base b = 8 cm, se cumple:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$

- En los polígonos regulares pueden establecerse relaciones pitagóricas entre el lado del polígono, su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.



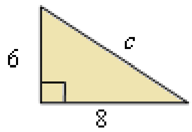


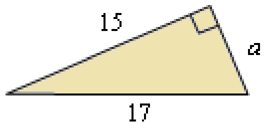
Como puede observarse, se establece la relación: $r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$. Por tanto, conociendo dos de las tres medidas puede obtenerse la otra.

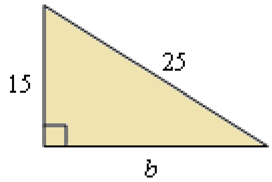
Tema 8. (I) Geometría. Teorema de Pitágoras Ejercicios

(Para resolver los ejercicios de hoja puede utilizarse calculadora. Haz los dibujos que necesites).

1. Halla el lado desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:







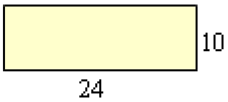
2. Comprueba si son rectángulos (o no son), los triángulos de lados:

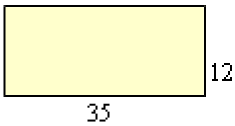
a) 9, 11 y 14 cm → NO, pues $9^2 + 11^2 = 81 + 121 = 202$ y $14^2 = 196 \rightarrow 9^2 + 11^2 \neq 14^2$.

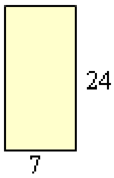
b) 12, 35 y 37 cm →

c) 1,7, 0,8 y 1,5 m →

3. Halla la diagonal de los siguientes rectángulos:

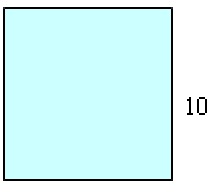


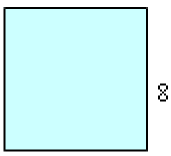


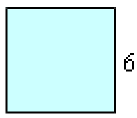


4. De un rectángulo se sabe que su diagonal mide 29 cm y su base 21 cm. Halla su altura, su perímetro y su área.

5. Halla la diagonal de los siguientes cuadrados:



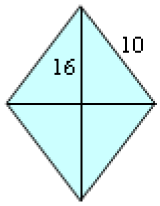




6. La diagonal de un cuadrado mide 12 cm, ¿cuánto mide su lado?

7. Halla el área de un cuadrado de diagonal 15 cm.

8. El lado de un rombo mide 10 cm y su diagonal mayor 16 cm. ¿Cuánto vale su diagonal menor?



9. Las diagonales de un rombo miden 8 y 6 cm. Halla su lado.

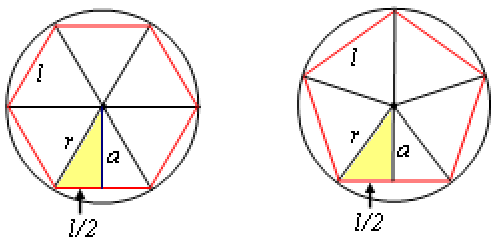
10. Halla el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

11. Un triángulo isósceles tiene perímetro 36 cm. Si su lado desigual mide 10 cm, halla su altura y su área.

12. En la figura adjunta se muestran un pentágono y un hexágono regulares. Ambos están inscritos en una circunferencia de radio 10 cm. Se pide:

a) Si la apotema del pentágono vale aproximadamente 8,1 cm, calcula el lado del pentágono y su área.

b) Calcula la apotema del hexágono y su área.



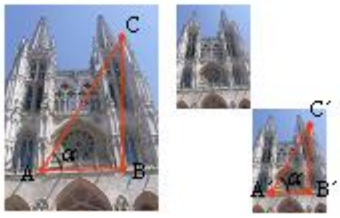
a)

b)

Soluciones: 1. c = 10; a = 8; b = 20. **2**. a) No. b) Sí. c) Sí. **3**. 26; 37; 25. **4**. 20 cm; 82 cm; 420 cm^2.
5. Aprox: 14,14; 11,31; 8,49. **6**. 8,49. **7**. 112,5 cm^2. **8**. 12 cm. **9**. 5 cm. **10**. 27,71 cm^2.
11. 12 cm; 60 cm^2. **12**. a) 11,73 cm; 237,5 cm^2. b) 8,66; 259,8 cm^2.

Tema 8. (II) Geometría: Semejanza, teorema de Tales **Resumen**

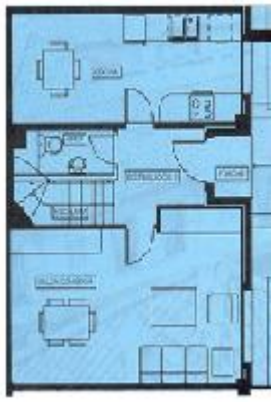
- Intuitivamente, puede decirse que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma: son iguales salvo en su tamaño; una es más grande que otra, pero sin deformaciones. Las ampliaciones o reducciones fotográficas son semejantes.
- Matemáticamente, dos figuras son semejantes cuando las medidas (las distancias) en una de ellas son proporcionales a las medidas correspondientes en la otra. El cociente de ambas medidas se llama razón de semejanza.



Que no haya deformaciones significa que los ángulos formados en una de ellas son iguales a los correspondientes en la otra.

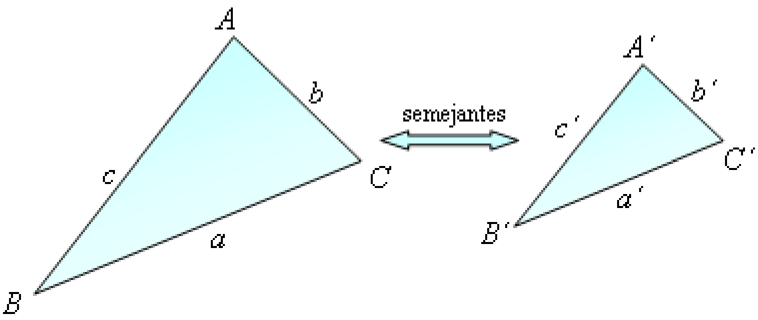
Ejemplos:

a) La razón de semejanza entre las dos fotografía de la portada de la catedral de Burgos es 0,5. Si se divide la medida de cualquier distancia de la foto pequeña por su correspondiente en la otra, el cociente es 0,5: (distancia de A´ a B´) / (distancia de A a B) = 0,5. Igualmente, d(A´, C´) / d(A, C) = 0,5.
Los ángulos de vértice A y A´ son iguales; lo mismo pasa con B y C..
b) Los planos, los mapas y las maquetas son representaciones semejantes de sus correspondientes en la realidad. En todos los casos, la razón de semejanza viene expresada por la escala. Así, un plano hecho a escala 1 : 100 indica que 1 cm del plano equivale a 100 cm (1 metro) en la realidad; y al revés, cada metro de la realidad debe representarse como 1 cm en el plano.



Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen iguales los ángulos y proporcionales los lados correspondientes.

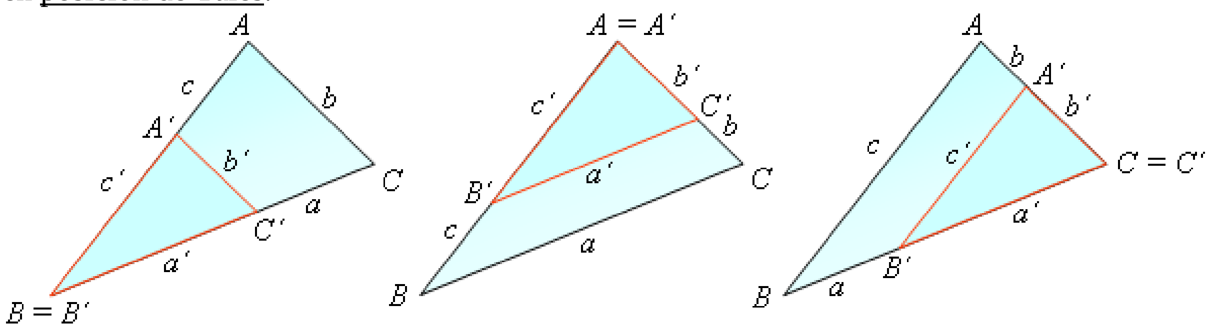


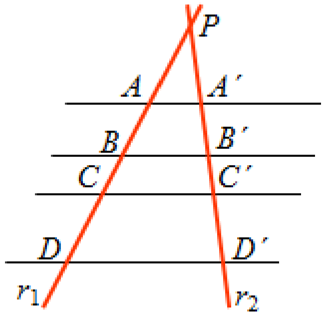
Se cumple que:

$\hat{A} = \hat{A}´;\ \hat{B} = \hat{B}´;\ \hat{C} = \hat{C}´;$

$\frac{a´}{a} = \frac{b´}{b} = \frac{c´}{c}.$

Si dos triángulos son semejantes pueden superponerse un ángulo y los dos lados que lo forman; los lados no comunes serían paralelos. Los triángulos puestos así se dicen que están en posición de Tales.





Teorema de Tales

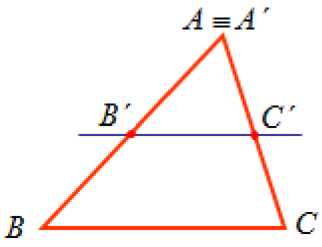
El teorema de Tales relaciona las longitudes de los segmentos obtenidos al cortar un conjunto de rectas paralelas por dos rectas cualesquiera. Se puede formular como sigue:

"Si se tiene un conjunto de rectas paralelas y son cortadas por otras dos rectas r_1 y r_2, entonces, las medidas de los segmentos determinados en una de las rectas secantes (en r_1) son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra (en r_2)".

Por tanto: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

También puede verse que los triángulos *PAA´*, *PBB´*, *PCC´*… son semejantes (están en posición de Tales): tienen dos lados superpuestos y el tercero, paralelo. Luego, también se cumple que:

$$\frac{PA}{AA'} = \frac{PB}{BB'} = \frac{PC}{CC'}.$$

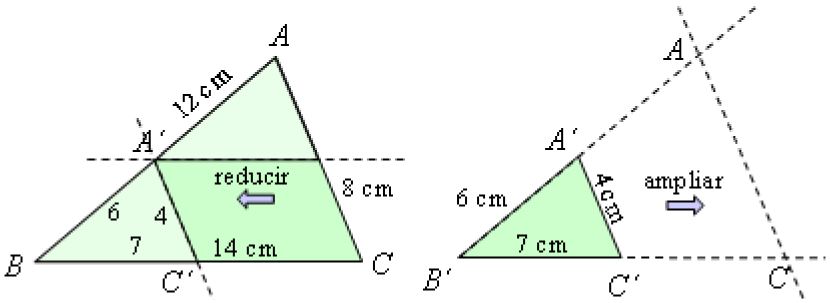


- De otra manera. Toda paralela a un lado de un triángulo, *ABC*, determina otro triángulo pequeño, *A´B´C´*, semejante al grande (Los triángulos *ABC* y *A´B´C´* están en posición de Tales).

Ejemplos:

a) Si dos triángulos son semejantes con razón de semejanza 2, y si los lados del pequeño miden 4 cm, 7 cm y 6 cm, los del mayor medirán 8 cm, 16 cm y 12 cm, respectivamente.

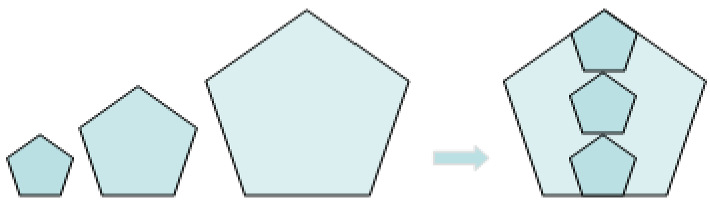
b) Para trazar el triángulo pequeño a partir del grande basta con unir dos de los puntos medios de dos lados.



c) Para trazar el triángulo grande a partir del pequeño se prolongan dos lados y con medida doble a partir del vértice común se unen los puntos determinados.

Figuras semejantes. Dos figuras son semejantes cuando los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra.

El cociente de las longitudes de los dos segmentos correspondientes se llama razón de semejanza o escala, *k*.



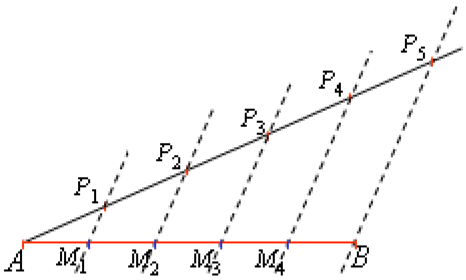
En este caso, la razón de semejanza entre el pentágono grande y el pequeño vale 3.

En las figuras semejantes los ángulos son iguales y las distancias proporcionales.

Otras aplicaciones de la semejanza (del teorema de Tales)

División de un segmento en partes iguales

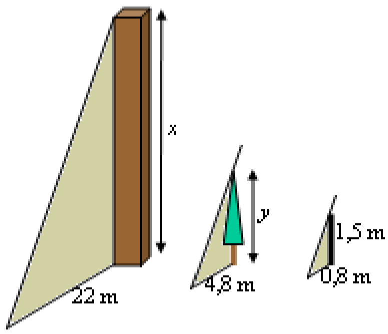
Ejemplo: Para dividir un segmento ***AB*** en 5 partes iguales se procede como sigue:
1. Se una traza una semirrecta que parta de *A*, y sobre ella se marcan 5 segmentos (consecutivos) de la misma longitud (eso puede hacerse con ayuda de un compás). Sean P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 los extremos de esos segmentos.
2. Se une el extremo del quinto segmento (P_5) con el punto *B*.
3. Se trazan rectas paralelas a la recta P_5B por los puntos de división P_1, P_2, P_3 y P_4.



4. Los puntos M_1, M_2, M_3 y M_4 obtenidos sobre el segmento ***AB*** lo dividen en 5 partes iguales.
(Debe ser evidente que si los segmentos $\boldsymbol{AP_1}$, $\boldsymbol{AP_2}$… son iguales también lo serán $\boldsymbol{AM_1}$, $\boldsymbol{AM_2}$…

Medida de la altura de un objeto vertical por su sombra

Ejemplo: Para medir la altura de un edificio, de un árbol, de una torre…, en un día de sol, puede procederse como sigue:
1. Se coge otro objeto de medida conocida, pongamos de 1,5 metros, y se mide la longitud de su sombra: 0,8 m, por ejemplo.
2. Se mide la longitud de la sombra del edifico, del árbol…; supongamos que la sombra del edifico mide 22 m, y la del árbol 4,8 m.
3. Aplicando Tales se tendrá:



$$\frac{1,5}{0,8} = \frac{x}{22} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 22}{0,8} = 41,25 \text{ m.}$$

Igualmente:

$$\frac{1,5}{0,8} = \frac{y}{4,8} \Rightarrow y = \frac{1,5 \cdot 4,8}{0,8} = 9 \text{ m.}$$

Tema 8. (II) Geometría: Semejanza, teorema de Tales Ejercicios

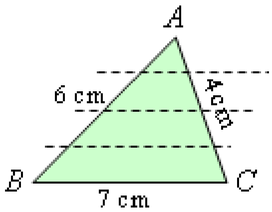
1. Un aula rectangular mide 9 m de largo y 7 m de ancho. Dibújala a escala 1 : 100.

Dibuja en ella la mesa del profesor que mide 1,20 × 0,80 metros.

2. En el plano de una vivienda, el salón mide 5,2 cm de largo y 3,8 cm de ancho. Si la escala es 1:150, ¿cuáles son las dimensiones del salón?

3. En un mapa a escala 1:100000 la distancia entre dos pueblos A y B es 4,8 cm. ¿Cuál es la distancia real entre ellos?

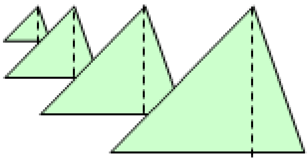
4. Los lados del triángulo dado en la figura adjunta miden 7, 6 y 4 cm. Si el lado AC se divide en cuatro partes iguales, trazando paralelas a la base por los puntos de división se obtienen otros tres triángulos más pequeños.



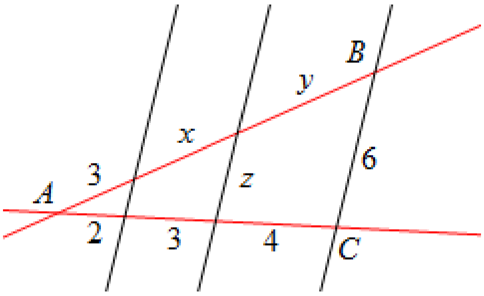
a) ¿Cuáles serán las longitudes de los lados de cada uno de los triángulos obtenidos?

b) Si la altura desde *A* mide 3,42 cm, ¿cuánto medirán las alturas de cada uno de los tres triángulos más pequeños?

c) ¿Cuánto valen las superficies de cada uno de los cuatro triángulos semejantes?



5. Aplicando el teorema de Tales halla los valores de *x*, *y*, *z* en la siguiente figura.



6. Divide el segmento ***AB***:

a) En 3 partes iguales.

b) En 7 partes iguales.

7. Ana mide 159 cm y proyecta una sombra de 53 cm. A la misma hora, la torre del campanario de la iglesia y un ciprés proyectan sombras de longitud 13,5 m y 6,2 m, respectivamente. ¿Cuál es la altura de la iglesia y del ciprés?

8. La maqueta de un rascacielos en forma de prisma cuadrangular mide 5 cm de lado por 22 cm de alto. Si está hecha a escala 1 : 1000, ¿cuáles son las medidas de ese edificio en la realidad? ¿Qué volumen ocupa la maqueta y cuál será el volumen real del rascacielos?

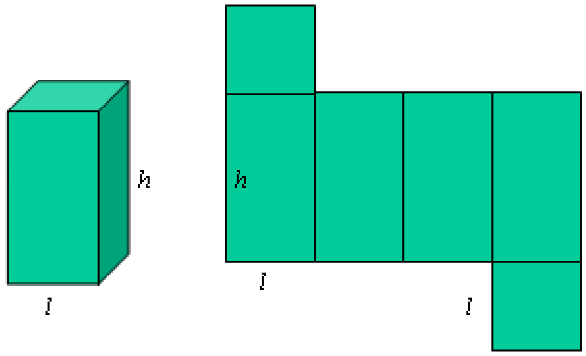
Soluciones:

2. 7,8 × 5,7 metros. **3**. 4,8 km. **4**. a) 1,75, 1,5 y 1 cm; 3,5, 3 y 2 cm; 5,25, 4,5 y 3 cm. b) 0,855; 1,71; 2,565. c) 0,748125 cm^2; 2,9925 cm^2; 6,7331 cm^2; 11,97 cm^2.

5. $x = \frac{9}{2}$; $y = 6$; $z = \frac{30}{9}$. **7.** 40,5 m; 18,6 m. **8**. Medidas: 50 m de lado; 220 m de altura. Volumen de la maqueta: 550 cm^3. Volumen real: 55000 m^3.

Tema 9. Cuerpos geométricos **Resumen**

Prisma



Volumen: $V = l^2 \cdot h$

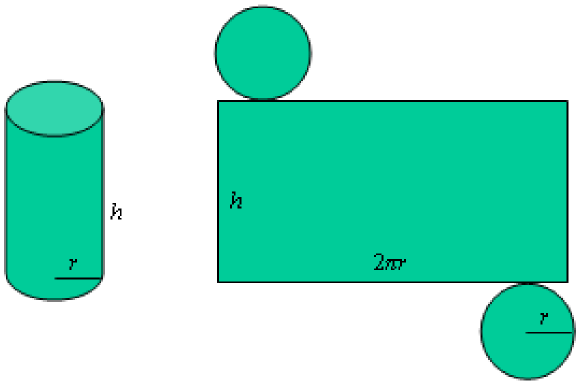
Área total: $A = 4 \cdot l \cdot h + 2 \cdot l^2$

- En general:

Volumen = área de la base × altura

Área total = Suma de las áreas de sus caras.

Cilindro



Volumen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

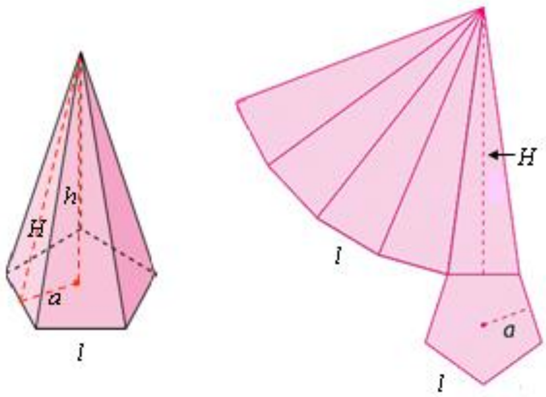
Área total: $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2$

- En general:

Volumen = área de la base × altura

Área total = Suma de las áreas de sus caras.

Pirámide



Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot l \cdot a}{2} \cdot h$

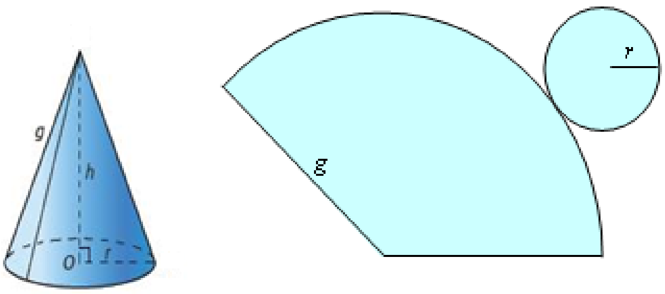
Área total: $A = 5 \cdot \frac{l \cdot H}{2} + 5 \cdot \frac{l \cdot a}{2}$

- En general:

Volumen = $\frac{1}{3}$ ·(área de la base × altura)

Área total = Suma de las áreas de sus caras.

Cono



Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Área total: $A = \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2$

- En general:

Volumen = $\frac{1}{3}$ ·(área de la base × altura)

Área total = Suma de las áreas de sus caras.

Tema 9. Cuerpos geométricos Ejercicios

1. Halla el volumen y el área total de un cubo de 20 cm de lado. (Haz un dibujo orientativo).

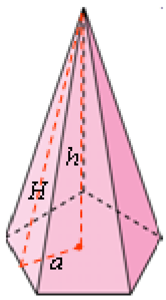
2. Una caja de zapatos mide 28 × 15 × 9 cm. Halla su volumen y el cartón mínimo necesario para construirla.

3. Un aula tiene forma de prisma recto. Si sus dimensiones son: 8 m de largo, 6,50 m de ancho y 2,80 m de alto, ¿cuántos m^3 de aire contiene? Si pudiese llenarse agua, ¿cuántos litros cabrían? (Haz un dibujo orientativo).

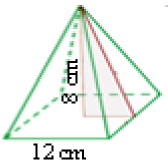
4. La misma aula tiene un lateral largo acristalado; en otro lateral está la puerta, que mide 1,20 × 2,30 m. Si se pintan las paredes, menos el lado acristalado y la puerta, ¿cuánto mide la superficie pintada?

5. Halla el volumen de una pirámide de base un pentágono regular de lado 8 cm, apotema de la base 5,5 cm y altura 15 cm.

Calcula también la apotema (*H*) de sus caras laterales y el área lateral.



6. Halla la superficie total y el volumen de una pirámide cuadrangular de lado 12 cm y altura 8 cm.



7. Un bidón tiene 54 cm de diámetro y 65 cm de alto. Halla su volumen y la cantidad de metal necesario para construirlo.

8. Halla el volumen y el área lateral de un cono de altura 4 cm y radio de la base 3 cm. (Dibújalo con las medidas dadas).

9. La torre de un castillo tiene forma cilíndrica y está coronada por una cubierta cónica. La base del cilindro mide 4 m, su altura 10 m y la altura del cono 3 metros más. ¿Cuál es el volumen total de la torre?

Soluciones:
1. 8000 cm^3; 2400 cm^2. **2**. 3780 cm^3; 1614 cm^2. **3**. 145,6 m^3; 145600 litros.
4. 56,04 m^2. **5**. 550 cm^3; H = 15,98 cm; 319,6 cm^2. **6**. 384 cm^2; 384 cm^3.
7. 148788,9 cm^3; 15599,52 cm^2. **8**. 37,68 cm^3; 75,36 cm^2. **9**. 138,16 m^3.