MATEMÁTICAS NO SUPERADAS DE 1º ESO

PLAN DE RECUPERACIÓN

1ª Evaluación

TEMAS	FECHA TOPE DE ENTREGA
1.-NÚMEROS NATURALES. 2.-NÚMEROS DECIMALES. 3.- POTENCIAS Y RAÍCES. 4.- DIVISIBILIDAD.	VIERNES 21 DE NOVIEMBRE

2ª Evaluación

TEMAS	FECHA TOPE DE ENTREGA
5.- NÚMEROS ENTEROS. 6.-FRACCIONES. 7.-OPERACIONES CON FRACCIONES. 8.-PROPRCIONALIDAD Y PORCENTAJES.	VIERNES 27 DE FEBRERO

3ª Evaluación

TEMAS	FECHA TOPE DE ENTREGA
9.-EXPRESIONES ALGEBRAICAS. ECUACIONES. 10.- CUADRILÁTEROS. 11.-TEOREMA DE PITÁGORAS. 12.- ÁREAS Y PERÍMETROS.	JUEVES 30 DE ABRIL

Tema 1. Números naturales — Resumen

Hay varios sistemas de numeración. Nos interesan dos: el sistema de numeración romano y el sistema de numeración decimal.
El sistema de numeración romano utiliza algunas letras a las que asigna un determinado valor:

I, uno; V, cinco; X, diez; L, cincuenta; C, cien; D, quinientos; M, mil.

Los símbolos pueden unirse para determinar otros números. Si un símbolo de valor menor está la derecha de otro, suma; si se sitúa a la izquierda, resta.
Ejemplos: II = 2; IV = 4; VI = 6; XIV = 14; CCCL = 350; DCX = 610; CMLVI = 956.

- A la izquierda de un símbolo mayor sólo se pueden poner las letras I, X y C, pero la I sólo puede ponerse delante de V y X. Por tanto, por ejemplo, **no puede escribirse** LD, ni VL, ni DMCLXVI…, ni IL. Luego, para escribir 450, 45, 666 o 49 hay que hacerlo así:
  450 = CDL → 400 + 50; 45 = XLV → 40 + 5;
  666 = DCLXVI → 600 + 50 + 10 + 5 + 1; 49 = XLIX → 40 + 9.

El sistema de numeración decimal utiliza los 10 números (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

- Es un sistema posicional, que significa que el valor de cada cifra depende del dígito y de la posición (del lugar) que ocupa en la cantidad representada.
- Las posiciones de derecha a izquierda se llaman: unidades, decenas, centenas, unidad de millar…
- Diez unidades de un orden cualquiera hacen una unidad de un orden superior.

Ejemplos: 30413 indica: 3 unidades + 1 decena + 4 centenas + 0 unidades de millar + 3 decenas de millar. Esto es: 30000 + 0000 + 400 + 10 + 3.

Redondeos. Cuando se opera con números muy grandes pueden aproximarse (redondearse se dice, pues algunas cifras del número se sustituyen por 0) a otros más fáciles de recordar. Así 2407123 puede redondearse por 2407000, con una aproximación a millares. También, el mismo número 2407123, puede redondearse por 2410000, con una aproximación a decenas de millar; o a 2400000, mediante una aproximación a centenas de millar.
Para redondear un número a un determinado orden de unidades:

Se sustituyen por ceros todas las cifras a la derecha de dicho orden
Si la primera cifra sustituida es 5 o más se suma una unidad a la cifra anterior.

Operaciones con números naturales
La suma y el producto cumplen las propiedades conmutativa y asociativa. Esto es:
Conmutativa: 7 + 4 = 4 + 7; 7 · 4 = 4 · 7. En general: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$
Asociativa: (7 + 8) + 12 = 7 + (8 + 12); (7 · 8) · 12 = 7 · (8 · 12)
El paréntesis indica que lo que abarca debe operase en primer lugar. Por tanto:
(**7 + 8**) + 12 = **15** + 12 = 27 y 7 + (**8 + 12**) = 7 + **20** = 27
Propiedad distributiva. Dice así: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ y $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$
Ejemplos: a) 3 · (5 + 8) = 3 · 5 + 3 · 8 = 15 + 24 = 39
Si se suma antes el paréntesis: 3 · (**5 + 8**) = 3 · **13** = 39
b) 7 · (12 – 3) = 7 · 12 – 7 · 3 = 84 – 21 = 63
Si se resta antes el paréntesis: 7 · (**12 – 3**) = 7 · **9** = 63

La división
La división 100 entre 4 es 25 → 100 **:** 4 = 25. Se cumple que 100 = 4 · 25. Es exacta.
La división 100 entre 6 no es exacta. Da de cociente 6 y de resto 2 → 100 = 6 · 16 + 4.
En general se cumple: Dividendo = divisor × cociente + resto → $D=d\cdot c+r$.

Tema 1. Números naturales — Ejercicios

1. Escribe en números romanos:

a) 37 → b) 132 → c) 49 → d) 267→

e) 348 → f) 467 → g) 599 h) 1380 →

2. Indica el valor de los siguientes números romanos:

a) XLVI → b) MCCCXII →

c) CMI → d) MDCCXLI →

e) ¿En qué año se construyó la Puerta de Alcalá?

3. Contesta:

a) ¿Cuántas unidades hay en veinte millares?

b) ¿Cuántas centenas hay en noventa mil unidades?

c) ¿Cuántos millares hay en siete millones?

d) ¿Cuántas decenas hay en cinco mil unidades?

4. ¿Cuál es el valor del dígito 4 en cada uno de los siguientes números?

a) 32042 → b) 4567 →

c) 12478 → d) 12004 →

5. Redondea al orden de unidades que se indica los siguientes números:

a) 245603 (a los millares) → b) 2345499 (a los millares) →

c) 7445421952 (a millones) → d) 230704567 (a millones) →

6. Calcula:

a) 7 + 9 – 4 = b) 12 + 9 – 5 – 10 =

c) 23 – 18 – 5 = d) 41 – 33 + 12 =

7. Calcula:

a) 1230 + 872 + 23049 b) 2370980 – 734021

8. Halla:

a) 7 + (9 – 4) =

b) 12 – (23 – 5 – 10) =

c) 23 – (18 + 5) =

d) 48 – (20 + 12) – 6 =

9. Halla:

a) 7 · 9 · 4 =

b) 12 · (9 + 5 – 10) =

c) 203 · 802 =

d) 4167 · 74 =

10. Calcula:

a) 203 · 1000 =

b) 32 · 100 =

c) 123 · 1000 =

d) 1000 · 100 =

11. Calcula, teniendo en cuenta los paréntesis:

a) 7 · 5 – 3 · (4 + 8) + 8 · (12 – 7) =

b) 18 : 6 + 3 · (24 – 15) – 36 : 9 =

12. Divide y comprueba la relación $D = d \cdot c + r$:

a) 123 : 7

b) 23004 : 42

c) 4588 : 37

d) 1200023 : 25

Soluciones:
1. a) XXXVII, b) CXXXII, c) XLIX, d) CCLXVII, e) CCCXLVIII, f) CDLXVII, g) DXCIX, h) MCCCLXXX.
2. a) 46, b) 1312, c) 901, d) 1741. **3**. a) 20000, b) 900, c) 7000, d) 500. **4**. a) 40, b) 4000, c) 400, d) 4.
5.a) 246000, b) 246000, c) 7445000000, d) 231000000. **6**. a) 12, b) 6, c) 0, d) 20.
7. a) 25151, b) 1636959. **8**. a) 12, b) 4, c) 0, d) 10. **9**. a) 252, b) 48, c) 162806, d) 308358.
10. 203000, b) 3200, c) 123000, d) 100000. **11**. a) 39, b) 26.
12. a) c = 17, r = 4. b) c = 547, r = 30. c) c= 124, r = 26. d) c= 48000, r = 23.

Tema 2. Números decimales — Resumen

El sistema de numeración decimal utiliza diez dígitos: 0, 1, 2,…, 9.
Diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.
Una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

1 unidad de millar = 10 centenas = 100 decenas = 1000 unidades.
1 UM = 10 C = 100 D = 1000 U.
1 unidad = 10 décimas = 100 centésimas = 1000 milésimas.
1 U = 10 d = 100 c = 1000 m = 10000 dm.
→ 1 décima = 0,1 unidades. → 1 centésima = 0,01 unidades.
→ 1 milésima = 0,001 unidades. → 1 diezmilésima = 0,0001 unidades.

Cuando se escriben cantidades, el valor de una cifra depende del lugar que ocupa.
Para expresar cantidades comprendidas entre dos números se utilizan los números decimales.
Así, los números entre 3 y 4 se designan por 3,1; 3,45; 3,568…

Ejemplo: 345,304 = **3**00 + **4**0 + **5** + 0,**3** + 0,0**0** + 0,00**4** → Se lee: trescientos cuarenta y cinco unidades y trescientas cuatro milésimas → 345,304 = 345 + 0,304.

La coma decimal se pone siempre entre las unidades y las décimas:

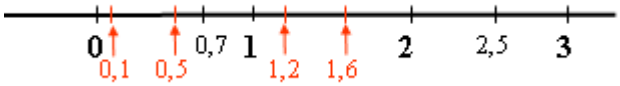
UM	C	D	U	d	c	m	dm		
2	3	0	4,	7	3	8	3	2304,7383	
	6	7	0,	5	4	0	0	670,5400	670,54
		6	8,	0	3	4	0	68,0340	68,034

Los ceros de la derecha no son imprescindibles. Se ponen cuando sea necesario comparar la parte decimal del número.

Para comparar dos números decimales se contrastan cifra a cifra comenzando por la izquierda.

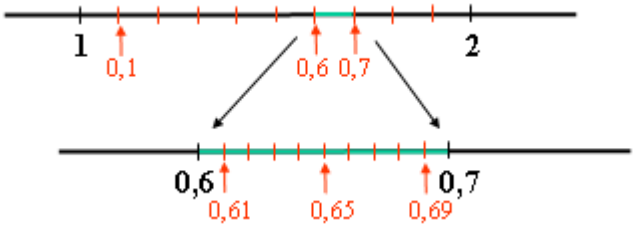
Ejemplos: a) 3,45 < 4,01. b) 0,23 < 0,24. c) 5,768 > 5,767. d) 0,2304 < 0, 2312.

- Los números decimales pueden representarse en la recta numérica. Todo número representado a la izquierda es menor que cualquiera representado a su derecha.



- Entre dos números decimales siempre hay otro decimal.

Ejemplo: Entre 0,6 y 0,7 están 0,61, 0,62,… Entre 0,61 y 0,62 está 0,612… Si los números anteriores, 0,6 y 0,7 se escriben como 0,60000 y 0,70000 resulta fácil intercalar otros decimales entre ellos.



- Si un número tiene muchas cifras decimales conviene dar una aproximación por redondeo. Redondear un número consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden; si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5 se le suma 1 a la última cifra.

Ejemplo: a) El número 34,7438 se aproxima a las décimas por 34,7, a las centésimas por 34,74 y a las milésimas por 34,744.
b) 0,275 se aproxima a las centésimas por 0,28.

Operaciones con números decimales

Suma y resta: para sumar o restar números decimales se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de las unidades correspondientes.

Ejemplos:

a) Para hallar la suma
23,075 + 370,8 + 7,49
se disponen los números como sigue:

```
  23,075
 370,800
+  7,490
 -------
 400,565
```

b) Para hallar la resta
245,39 – 28,0387
se disponen los números así:

```
 245,3900
– 28,0387
 --------
 217,7513
```

Multiplicación: se multiplican como si fuesen enteros y, después; el número de cifras decimales del producto es la suma de las cifras decimales de los factores.

Ejemplos:

a) Para multiplicar 23,27 por 73
se disponen los números como sigue:

```
  23,075
×    73
 -------
  69225
 161525
 -------
1684,475
```

Tres cifras decimales.

b) Para multiplicar 23,075 por 4,37
se disponen los números como sigue:

```
  23,075
×   4,37
 -------
 161525
  69225
  92300
 -------
 100,83775
```

Cinco cifras decimales.

División: Se añaden ceros a la derecha al decimal que tenga menos cifras, hasta igualar las cifras decimales de ambos números. Para obtener los decimales del cociente se pone la coma y se siguen "bajando" ceros en el resto, hasta que se consiga el orden decimal deseado.

Ejemplos:

a) Para dividir 30,2 **:** 4
se disponen los números así:

```
 30,2 | 4,0
```

Se quitan las comas.

```
 302 | 40
 220   7,55
 200
   0
```

b) Para dividir 22 **:** 4,5
se disponen los números así:

```
 22,0 | 4,5
```

Se quitan las comas.

```
 220 | 45
 400   4,8
  40
```

Si se desea se pueden sacar más decimales.

c) Para dividir 2307,35 **:** 7,2
se disponen los números así:

```
2307,35 | 7,20
 147    320,46
  03 35
    470
     38
```

Tema 2. Números decimales — Ejercicios

1. Escribe cómo se leen los siguientes números:

a) 2,4 → dos unidades y cuatro décimas. (También: 2 coma 4).

b) 203,8 →

d) 2,348 →

e) 3,0012 →

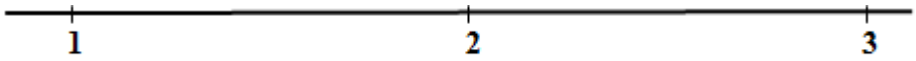
2. Escribe con números:

a) veinte unidades y treinta y dos milésimas →

b) cuatrocientas cinco diezmilésimas →

d) siete centésimas →

3. Representa en la recta numérica 2, 2,3, 2,47 y 3.



4. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

3,08; 3,023; 3,24; 3,189; 3,203; 3,501; 3,303

5. Intercala un número entre cada pareja:

a) 4,9 < < 4,91. b) 7,23 < < 7,24.

c) 0,021 < < 0,022. d) 2,333 < < 2,334.

6. Redondea a décimas:

a) 23,46 → b) 3,425 → c) 9,651 →

7. Aproxima a centésimas:

a) 12,094 → b) 30,625 → c) 0,7849 →

8. Haz las restas:

c) 24 – 12,8

d) 30445,24 – 8892,973

9. Haz las sumas:

a) 23,1 + 12,34 + 678,00367

b) 4980,45 + 789,37 + 1003,408

10. Multiplica:

a) 23,7 × 3,4

b) 0,36 × 9,2

c) 39 × 0,09

d) 0,0028 × 0,06

11. Divide (con dos cifras decimales):

a) 24 : 3,2

b) 2,05 : 0,1

c) 0,28 : 0,05

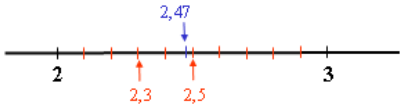
d) 12,6 : 3,02

12. El litro de aceite cuesta 3,95 €. ¿Cuánto costarán 3 litros? ¿Cuánto costarán 0,75 litros?

13. Por 2,5 kilos de naranjas se han pagado 4 €. ¿A cuánto está el kilo de naranjas?

Soluciones: **1**. a) dos unidades y cuatro décimas. b) doscientas tres unidades y ocho décimas. c) dos unidades y trescientas cuarenta y ocho milésimas. d) tres unidades y doce diezmilésimas. **2**. a) 20,032. b) 0,0405. c) 0,07.

3.



4. 3,023 < 3,08 < 3,189 < 3,203 < 3,24 < 3,303 < 3,501

5. a) 4,905. b) 7,231. c) 0,02109. d) 2,3331

6. a) 23,5. b) 3,4. c) 9,7. **7**. a) 12,09. b) 30,63. c) 0,78.

8. a) 11,2. b) 21552,267. **9**. a) 713,44367. b) 6773,228.

10. a) 80,58. b) 3,312. c) 3,51. d) 0,000168.

11. a) 7,5. b) 20,5. c) 5,6. d) 4,17. **12**. 11,85 €. 2,9625 €, se aproxima a 2,96 €. **13**. 1,6 €/kg.

Tema 3. Potencias — Resumen

Potencia de un número es el producto repetido de ese número. Así, si a es un número cualquiera, el producto $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$.
El número a se llama base; el número 4, que indica las veces que se repite el mismo factor, se llama exponente.
Ejemplos: a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$. b) $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$. c) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.
d) $10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000\,000$.

En el último ejemplo debes observar que una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.
El uso de las potencias de base 10 permite la descomposición polinómica de un número, que se basa en el distinto valor de una cifra dependiendo de la posición que ocupa en el número; ese valor puede expresarse mediante potencias de 10. Así, por ejemplo

$7345304 = \mathbf{7} \cdot 10^6 + \mathbf{3} \cdot 10^5 + \mathbf{4} \cdot 10^4 + \mathbf{5} \cdot 10^3 + \mathbf{3} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{4}$
$= 7000000$ (7 unidades de millón)
$+ 300000$ (3 centenas de millar)
$+ 40000$ (4 decenas de millar)
$+ 5000$ (unidades de millar)
$+ 300$ (3 centenas)
$+ 00$ (0 decenas)
$+ 4$ (4 unidades)

Operaciones con potencias
Suma y resta de potencias
La operación $2^5 + 3^3 - 5^2$ se hace convirtiendo cada potencia en su número correspondiente.
Ejemplos: a) $2^5 + 3^3 - 5^2 = 32 + 9 - 25 = 16$. b) $3^2 - 2^3 + 4^2 = 9 - 8 + 16 = 17$.

Tampoco pueden simplificarse los cálculos aunque los sumandos tengan la misma base.
Ejemplos: a) $2^5 + 2^3 = 32 + 8 = 40$. b) $3^5 - 3^3 = 243 - 27 = 216$.

Producto de un número por una potencia
El producto $5 \cdot 2^3$ significa $5 \cdot 8 = 40$; pero un error frecuente es escribir $5 \cdot 2^3 = 10^3$. El exponente sólo afecta al 2. Para que el exponente afectase también al 5 habría que indicarlo con paréntesis, así: $(5 \cdot 2)^3$, que ciertamente vale 10^3.
Ejemplo: $3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 4^2 - 5^2 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 16 - 25 = 24 + 32 - 25 = 31$.

Producto y cociente de potencias
La multiplicación o división de potencias de la misma base puede simplificarse. Para ello se emplean las siguientes propiedades:
1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ **Ejemplo:** $3^2 \cdot 3^3 = (9 \cdot 27) = 3^5 = 243$.
2. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ **Ejemplo:** $\left(3^2\right)^3 = (9)^3 = 3^6 = 729$.
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$ **Ejemplo:** $4^5 : 4^2 = 4^3 = 64$.
Consecuencia: para todo $a \neq 0$, $a^0 = 1$, ya que $1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. **Ejemplo**: $7^0 = 1$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **Ejemplo**: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6$.

Raíz cuadrada: $\sqrt{a} = b$, $a > 0 \Leftrightarrow b^2 = a$.
Ejemplos: a) $\sqrt{25} = 5$, pues $5^2 = 25$. b) $\sqrt{144} = 12$, pues $12^2 = 144$. c) $\sqrt{1600} = 40$.

Tema 3. Potencias — Ejercicios

1. Expresa como potencia:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 =$ b) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$ c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ d) $7 \cdot 7 =$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $2^5 =$ b) $6^2 =$ c) $10^4 =$ d) $12^3 =$

3. Halla el valor del exponente para:

a) $2^n = 16 \Rightarrow 2^{\overline{n}} = 16 = 2^{\overline{4}} \Rightarrow a = 2.$ b) $3^n = 9 \Rightarrow$

c) $10^n = 10000 \Rightarrow$ d) $4^n = 64 \Rightarrow$

4. Halla el valor de la base en cada caso:

a) $a^3 = 8 \Rightarrow \underline{a}^3 = 8 = \underline{2}^3 \Rightarrow a = 2.$ b) $a^7 = 1 \Rightarrow$

c) $a^5 = 100000 \Rightarrow$ d) $a^4 = 81 \Rightarrow$

5. Escribe con todas sus cifras:

a) $10^7 =$ b) $10^8 =$

c) $10^4 =$ d) $10^3 =$

6. Escribe como potencia de base 10:

a) Diez millones = $10.000000 = 10^7$. b) Cien millones =

c) Mil millones = d) Cien mil =

7. Escribe como producto de un número por una potencia de base 10 los siguientes números:

a) 2000 b) 800 c) 70 d) 5

(Observación: $10^1 = 10$; $10^0 = 1$).

8. Escribe como suma de números por potencias de base 10 la suma 2000 + 800 + 70 + 5.

$2000 + 800 + 70 + 5 = 2 \cdot 1000 + \ldots$ $= 2 \cdot 10^3 + \ldots$

9. Escribe en forma polinómica:

a) 2875 =

b) 60972 =

c) 30043 =

10. Escribe el número correspondiente a cada descomposición polinómica:

a) $6 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 =$

b) $8 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1 + 2 =$

11. Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $7 \cdot 10^4 =$

b) $7 \cdot 2^4 + 4 \cdot 3^2 = 7 \cdot 16 + 4 \cdot 9 = 112 + 36 = 148.$

c) $2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 5^2 =$

d) $5 \cdot 3^5 + 9 \cdot 4^2 - 3 \cdot 7^3 =$

e) $2^3 \cdot 6^2 =$

f) $3^2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 4^2 =$

g) $5^2 \cdot 2^3 - 145 =$

h) $2^5 \cdot 5^2 - 12 \cdot 3^3 =$

12. Expresa mediante una sola potencia:

a) $4^2 \cdot 4^6 =$

b) $3^5 \cdot 3^2 =$

c) $6^3 \cdot 6^5 =$

d) $2 \cdot 2^3 =$

e) $(5^3)^4 =$

f) $2^{12} : 2^8 =$

g) $10^6 : 10^2 =$

h) $4^4 \cdot 25^4 =$

13. Halla el cuadrado de los 10 primeros números naturales.

$1^2 = 1$; $2^2 =$;…

14. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{64} = 8$, pues $8^2 = 64$.

b) $\sqrt{81} =$

c) $\sqrt{121} =$

d) $\sqrt{169} =$

e) $\sqrt{225} =$

f) $\sqrt{400} =$

g) $\sqrt{625} =$

h) $\sqrt{676} =$

15. Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior, indica el valor entero aproximado de:

a) $\sqrt{67} \approx$

b) $\sqrt{125} \approx$

c) $\sqrt{175} \approx$

d) $\sqrt{675} \approx$

Soluciones:

1. a) 2^3. b) 1^4. c) 5^4. d) 7^2. **2**. a) 32. b) 36. c) 10000. d) 1728. **3**. a) 4. b) 2. c) 4. d) 3.
4. a) 2. b) 1. c) 10. d) 3. **5**. a) 10000000. b) 100000000. c) 10000. d) 1000.
6. a) 10^7. b) 10^8. c) 10^9. d) 10^5. **7**. a) $2000 = 2 \cdot 10^3$. b) $8 \cdot 10^2$. c) $7 \cdot 10$. d) $5 \cdot 1 = 5 \cdot 10^0 \rightarrow$ simplemente 5.
8. $2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$.
9. a) $2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$. b) $6 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$. c) $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10 + 3$.
10. a) 6204239. b) 83032. **11**. a) 70000. b) 148. c) 125. d) 330. e) 288. f) 24. g) 55. h) 476.
12. a) 4^8. b) 3^7. c) 6^8. d) 2^4. e) 5^{12}. f) 2^4. g) 10^4. h) 10^8. **13**. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
14. a) 8. b) 9. c) 11. d) 13. e) 25. f) 20. g) 25. h) 26.
15. a) 8. b) 11. c) 13. d) 26, aunque la llamada raíz entera vale 25.

Tema 4. Divisibilidad Resumen

Un número es divisible por otro cuando su división es exacta.
Ejemplo:
a) 21 es divisible por 3. b) 40 es divisible por 8. c) 18 no es divisible por 5.

Decir que un número es divisible por otro es lo mismo que decir que el número mayor es múltiplo del menor. (Salvo el 0, que es múltiplo de todos los demás números).
Ejemplo:
a) 21 es múltiplo de 3. b) 100 es múltiplo de 25. c) 25 no es múltiplo de 4.

En general, decir que "*a* es divisible por *b* " es lo mismo que decir "*a* es múltiplo de *b*".
También puede decirse que *b* es divisor de *a*.

- Si *a* es múltiplo de *b* entonces *b* es divisor de *a*, y viceversa.
- Todo número natural tiene infinitos múltiplos, que se obtiene multiplicándolo por 0, 1, 2…
- Todo número natural es divisor y múltiplo de sí mismo.
- El número 1 es divisor de todos los números.

Divisores de un número; números primos

Un número puede tener varios divisores. Para hallar los divisores de un número hay que dividirlo por 2, 3, 4,…: si la división es exacta, se obtiene un divisor del número.
Ejemplo:
a) Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, y 12.
b) Los divisores de 21 son 1, 3, 7 y 21.

Números primos

1	2	3	5
7	11	13	17
19	23	29	31
37	41	43	47
53	59	61	67
71	73	79	83
89	97		

- Si un número sólo es divisible por sí mismo y por la unidad se llama primo.
- Si un número tiene más de dos divisores se llama compuesto.

Ejemplo:
a) Los números 7, 17 y 23 son primos.
b) Los números 8, 25 y 40 son compuestos.

Criterios de divisibilidad

- Divisibilidad por 2. Un número es divisible por 2 si es par.

Ejemplos: 2, 24 o 130.

- Divisibilidad por 3. Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras en múltiplo de 3.

Ejemplos:
a) 99, 132 o 2124 son múltiplos de 3, pues sus cifras suman, respectivamente, 18, 6 o 9, que son números múltiplos de 3.
b) Los números 122 o 2222 no son múltiplos de 3.

- Divisibilidad por 5. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

Ejemplos: 35, 70 y 135.

- Divisibilidad por 9. Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras en múltiplo de 9.

Ejemplos:
a) 909 y 1035 son múltiplos de 9, pues sus cifras suman, respectivamente, 18 y 9, que son números múltiplos de 3.
b) El número 1035 es múltiplo de 45, pues múltiplo de 5 y de 9 a la vez.

Expresión de un número como producto. Descomposición de un número en factores primos
Descomponer un número en factores es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.

Ejemplo:
72 = 2 · 36; o también, 72 = 8 · 9 = 24 · 3 = 2 · 3 · 12. Hay varias posibilidades.

- Factor de un número es cada uno de sus divisores.
- Factorizar un número es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.
- Un número puede descomponerse factorialmente de varias maneras.

Cuando todos los factores son primos se dice que el número está descompuesto como producto de factores primos. Los factores primos se obtienen mediante divisiones sucesivas.

- Un número puede descomponerse en producto de sus factores primos de manera única, salvo el orden de esos factores.

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$32 = 2^5$

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

Ejemplo:
a) 72 puede escribirse como: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow 72 = 2^3 \cdot 3^2$.
b) 50 = 2 · 5 · 5. Observa: 50 : 2 = 25 → 25 : 5 = 5 → 5 : 5 = 1.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números
Dos números pueden tener varios divisores comunes. El mayor de ellos se llama máximo común divisor: m.c.d.

Ejemplo:
Los números 48 y 36 tienen varios divisores comunes. El mayor de ellos es 12.
Divisores de 48: **1, 2, 3, 4, 6**, 8, **12**, 16, 24 y 48.
Divisores de 36: **1, 2, 3, 4, 6**, 9, **12**, 18 y 36.

Dos números tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos se llama mínimo común múltiplo: m.c.m.

Ejemplo:
Los números 48 y 36 tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos es 12.
Múltiplos de 48: 48, 96, **144**, 192, 240, **288**,…, **432**,…, **576**…
Múltiplos de 36: 36, 72, 108, **144**, 180, 216, 252, **288**,…, **432**,…, **576**…

Criterio para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos números.
Para calcular el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números se descomponen los números dados en sus factores primos.

- El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes a ambos números (en este criterio suele añadirse "con el menor exponente").
- El m.c.m. se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes a ambos números (afectados con el mayor exponente).

Ejemplo:
Los números 48 y 36 se descomponen así: $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$.
m.c.d.(48, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$. m.c.m.(48, 36) = $2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$.

Tema 4. Divisibilidad — Ejercicios

1. Entre los siguientes números empareja los que sean múltiplos y divisores entre sí:

12, 21, 6, 15, 8, 32, 7, 75, 9, 27

2. Halla tres múltiplos y tres divisores, si los tiene, de cada uno de los siguientes números:

	a) 50	b) 72	c) 16	d) 17
Múltiplos				
Divisores				

3. Halla todos los divisores de 90.

4. Aplicando los criterios de divisibilidad indica si los siguientes números son divisibles por 2, por 3 o por 5.

a) 102 $\rightarrow$ de 2, pues es par; de 3, pues la suma de sus cifras es 3.

b) 120 $\rightarrow$

c) 91 $\rightarrow$

5. Halla tres números que sean, a la vez, múltiplos de 2, 3 y 5.

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; …

6. Halla tres números que sean, a la vez, múltiplos de 2, 7 y 10.

7. Indica, justificando tu respuesta, cuáles de los siguientes números son primos:

a) 101 b) 103 c) 105 d) 107

8. Descompón en factores primos los números:

a) 40 =

b) 105 =

c) 97 =

d) 360 =

40	105	97	360

9. A partir de su descomposición factorial, indica todos los divisores de:

a) 36 $\rightarrow$ como $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, sus divisores serán:

1; 2; 3; $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$; $3 \cdot 3 = 9$; $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$; $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$; y $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

b) 42 $\rightarrow$

c) 71 $\rightarrow$

10. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 25 y 35 $\rightarrow$

b) 42 y 63 $\rightarrow$

c) 30 y 80 $\rightarrow$

11. Halla todos los divisores comunes de:

a) 18 y 24 $\rightarrow$

b) 45 y 60 $\rightarrow$

12. Para cada una de las parejas anteriores, halla los tres múltiplos comunes más pequeños.

a) | b)

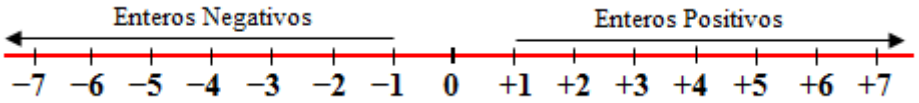
13. Halla todos los múltiplos comunes de 2, 3, 5 y 7 menores que 1000. ¿Cuál es el m.c.m. de esos números?

14. Para pavimentar una habitación de 400 × 360 cm se desean emplear baldosas cuadradas. ¿Cuánto medirán de lado para que el número de baldosas empleadas sea mínimo, sin necesidad de cortar ninguna?

Soluciones: **1**. 12 y 6; 21 y 7; 15 y 75; 8 y 32; 9 y 27. **2**. a) 50, 100 y 150; 25, 10 y 5. b) 72, 144 y 720; 36, 18 y 1. c) 32, 48 y 64; 8, 4 y 2. d) 17, 34 y 51; 1 y 17: es primo. **3**. 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90. **4**. b) por 2, por 3 y por 5. c) Ninguno. **5**. 30; 60 y 90. **6**. 70, 140 y 210. **7**. 101; 103; 107. **8.** a) $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. b) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. c) $97 = 1 \cdot 97$, primo. d) $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. **9**. b) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$. c) 71 es primo $\rightarrow$ 1 y 71. **10**. a) 5 y 175. b) 7 y 126. c) 10 y 240. **11**. a) 6, 3, 2, 1. b) 15, 5, 3, 1. **12**. a) 48, 96, 144. b) 84, 168, 252. **13**. 210, 420, 630 y 840. **14**. 40 cm.

Tema 5. Números enteros — Resumen

El conjunto de los números enteros es **Z** = {... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3...}. Esta formado por los positivos y los negativos.
Los positivos son los naturales → + 1, +2, +3, ..
Los números negativos son → –1, –2, –3, …
Los números negativos son los opuestos de los positivos. Así, el opuesto de +2 es –2.
Pueden representarse en la recta como sigue:



Valor absoluto de un número entero es el número natural que resulta al quitarle el signo.

Ejemplos:

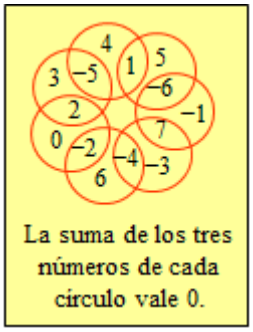
$|-7| = 7$; $|+18| = 18$ → El valor absoluto siempre es positivo.

El orden de los números enteros es el que se observa en la recta: un número es mayor que otro cuando está representado a su derecha.

- Todos los números positivos son mayores que 0. Todos los negativos son menores que 0.
- Dados dos números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto. Así: –10 < –3.

Suma y resta

- Para sumar dos números enteros con el mismo signo se suman los valores absolutos de ambos números y se pone el signo que tenían los sumandos.



La suma de los tres números de cada círculo vale 0.

Ejemplos:

a) (+4) + (+2) = +6. b) (–7) + (–2) = –9.

- Para sumar dos números con distinto signo hay que restarlos y ponerle al resultado el signo que lleve el número mayor en valor absoluto.

Ejemplos:

a) (+3) + (–7) = –(7 – 3) = –4. b) (–6) + (+11) = +(11 – 6) = +5.

- Para restar dos números enteros hay que tener en cuenta que: – (+) = –; – (–) = +

Ejemplos:

a) – (+ 5) = –5. b) – (–7) = +7.
c) (–7) – (+5) = (–7) – 5 = –12. d) (+6) – (–7) = (+6) + 7 = 13.

- Para sumar y restar más de dos números se pueden sumar los positivos por un lado y los negativos por otro y, después, restar los resultados.

Ejemplos:

a) –4 + 7 + 5 – 9 + 6 = (7 + 5 + 6) – (4 + 9) = 18 – 13 = 5.
b) 9 – 7 – 12 + 8 – 4 = 9 + 8 – (7 + 12 + 4) = 17 – 23 = –5.

Sumas y restas con paréntesis

Hay que tener en cuenta que un signo menos delante de un paréntesis cambia el signo de todos los términos que abarca.

Ejemplos:

a) $-(4 - 7 + 9) = -4 + 7 - 9 = -6$. b) $-(-5 + 7 - 13) = +5 - 7 + 13 = +11$.

c) $8 - (4 - 7) + [9 - (2 - 6 + 13)] = 12 - 4 + 7 + 9 - 2 + 6 - 13 = 34 - 19 = 15$.

Multiplicación y división. En todos los casos hay que tener en cuenta las reglas de los signos:

$[+] \cdot [+] = [+]$ $[+] \cdot [-] = [-]$ $[-] \cdot [+] = [-]$ $[-] \cdot [-] = [+]$

$[+] : [+] = [+]$ $[+] : [-] = [-]$ $[-] : [+] = [-]$ $[-] : [-] = [+]$

Ejemplos:

$(+3) \cdot (+4) = +12$; $(+7) \cdot (-2) = -14$; $(-5) \cdot (+6) = -30$; $(-1) \cdot (-9) = +9$;

$(+18) : (+3) = +6$; $(+12) : (-2) = -6$; $(-32) : (+8) = -4$; $(-28) : (-7) = +2$.

Operaciones combinadas. El orden es el siguiente: 1) Paréntesis; 2) Productos; 3) Sumas

Ejemplos:

a) $12 - 2 \cdot (9 - 3) - 10 : (-2) - (-7) = 12 - 2 \cdot 6 + 5 + 7 = 12 - 12 + 5 + 7 = 12$.

b) $(12 - 2) \cdot (9 - 3) - 10 : [(-2) - (-7)] = 10 \cdot 6 - 10 : (+5) = 60 - 2 = 58$.

Potencias de números enteros. Se hace igual que con números naturales, pero hay que tener en cuenta el signo de la base y si el exponente es par o impar, cumpliéndose:

$(+a)^n = a^n \rightarrow$ siempre positivo.

$(-a)^n = +a^n$, si n es par; $(-a)^n = -a^n$, si n es impar.

Ejemplos:

a) $(+3)^2 = (+3)\cdot(+3) = +9$. b) $(+3)^4 = 3^4 = 81$. c) $(+5)^0 = 1$.

Ejemplos:

a) $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4$ b) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16$ c) $(-2)^0 = 1$

Raíz cuadrada de un número entero:

- La raíz cuadrada de un número entero positivo tiene dos soluciones.

Ejemplos:

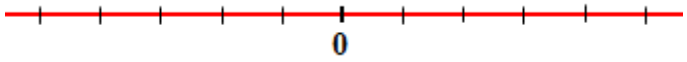
a) $\sqrt{+16} = +4$, pues $(+4)^2 = +16$. Pero también: $\sqrt{+16} = -4$, pues $(-4)^2 = +16$.

b) $\sqrt{+49} = +7$, pues $(+7)^2 = +49$. Igualmente, $\sqrt{+49} = -7$, pues $(-7)^2 = +49$.

- La raíz cuadrada de los números negativos no existe.

Tema 5. Números enteros — Ejercicios

1. Representa en la recta los números: –4, +3, –1. Representa también sus opuestos.



2. Expresa como números enteros las siguientes situaciones:

a) La temperatura era de ocho grados bajo cero →

b) Juan ha recibido una propina de quince euros →

c) Juan ha dado a su hermano pequeño tres euros →

d) El ascensor ha subido seis plantas →

3. Halla:

a) $|-5| =$ b) $|+13| =$

c) $|-3|+|+4| = +3 + 4 = +7.$ d) $|-21|-|-15| =$

4. Calcula:

a) 3 + 9 = b) 3 – 9 = c) –3 + 9 = d) –3 – 9 =

5. Calcula:

a) (+4) + (12) = b) (–4) + (+12) =

c) (+4) – (+12) = d) (–4) – (–12) =

6. Halla:

a) 12 – 7 + 4 – 3 – 2 = 16 – 12 = 4. b) –5 + 9 – 7 – 4 =

c) –16 – 9 + 21 + 2 = d) –12 + 8 – 7 + 4 =

7. Halla:

a) (+13) + (+7) – (–3) + (–5) =

b) (–4) – (–5) – (+6) + (–7) =

c) (–7) – (+8) + (–3) – (–9) =

8. Calcula:

a) 12 – (9 – 12) – 15 = b) –8 + (–13 + 18) – 6 =

9. Multiplica:

a) $(+2)\cdot(+5) =$. b) $(+2)\cdot(-5) = -10$. c) $(-2)\cdot(+5) =$ d) $(-2)\cdot(-5) =$

10. Divide:

a) $(+18) : (+3) = +6$. b) $(+18) : (-3) =$

c) $(-18) : (+3) =$ d) $(-18) : (-3) =$

11. Calcula:

a) $12 + 5\cdot(-4) - 20 =$

b) $13 - 2\cdot(4 - 5) =$

c) $(-3)\cdot(3 + 5) - 4\cdot(-9 - 5) =$

d) $-6 + (-4)\cdot(+3) - 5 =$

12. Halla:

a) $(-2)\cdot(4 - 6 + 9) = (-2)\cdot(13 - 6) = (-2)\cdot(+7) = -14$.

b) $(7 - 3)\cdot(4 + 8 - 9) =$

c) $(-12) : (-2) - (-5)\cdot(+7 - 10) =$

d) $(+20) : (-5) - (-2)\cdot(+6) =$

13. Calcula:

a) $(+4)^3 =$ b) $(-3)^4 =$ c) $(-5)^3 = -5^3 = -125$. d) $(+2)^7 =$

14. Calcula:

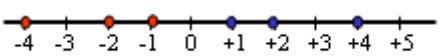
a) $(-2)^4 - (+3)^2 + (-5)^2 =$

b) $(+5)^2\cdot(-1)^7 - (-5)^2 - (-3)^3 =$

c) $(-6)^0\cdot(-2)^5 =$ d) $(-6)^3 : (-3)^2 =$

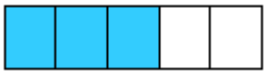
15. Halla, si existen, las siguientes raíces:

a) $\sqrt{(+81)} =$ b) $\sqrt{(-49)} =$ c) $\sqrt{+100} =$ d) $\sqrt{+144} =$

Soluciones: 1. 

2. a) –8º C. b) +15 €. c) –2 €. d) –6. **3**. a) +5. b) +13. d) +6. **4**. a) +12. b) –6. c) +6. d) –12.
5. a) +16. b) +8. c) –8. d) +8. **6**. b) –7. c) –2. d) –7. **7**. a) +18. b) –12. c) –9. **8**. a) 0.b) –9.
9. a) +10. c) –10. d) +10. **10**. b) –6. c) –6. d) +6. **11.** a) –28. b) 15. c) +32. d) –23. **12**. b) +12. c) –9.
d) +8. **13.** a) 64. b) 81. d) 128. **14**. a) 32. b) –23. c) –32. d) –24. **15.** a) +9. b) No. c) +40. d) +6.

Tema 6. Fracciones — Resumen



Una fracción suele considerase como "la parte de un todo" que ha sido dividido en porciones iguales. Así, $\frac{3}{5}$ indica que se toman 3 trozos de algo que se dividido en 5 trozos iguales. Es la parte coloreada en la figura.
El número de arriba se llama numerador e indica el número de partes que se toman; el número de abajo se llama denominador, e indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.

- Las fracciones se puede aplicar a cualquier magnitud.

Ejemplos: a) Si una tarta se divide en 6 partes iguales, cada parte es $\frac{1}{6}$. La fracción $\frac{5}{6}$ de esa tarta indica que se han tomado 5 de las 6 partes.

b) Si 500 € se dividen en 5 partes iguales, cada parte será $\frac{1}{5}$, y equivale a 100 €. La fracción $\frac{3}{5}$ de 500 € serán 300 €. Esto es: $\frac{3}{5}$ de $500 = 3 \times \frac{1}{5}$ de $500 = 3 \times 100 = \frac{3 \cdot 500}{5} = \frac{1500}{5} = 300$.

- También, una fracción puede considerarse como el cociente del numerador entre el denominador.

En este caso, el numerador puede ser mayor que el denominador. Por ejemplo, $\frac{12}{5}$.

Ejemplos: a) $\frac{3}{5}$ es igual que 3 dividido entre 5 $\rightarrow 3 : 5 = 0{,}6$.

b) $\frac{3}{8}$ es igual a 3 entre 8 $\rightarrow 3 : 8 = 0{,}375$. c) $\frac{12}{5}$ es igual a 12 entre 5 $\rightarrow 12 : 5 = 2{,}4$.

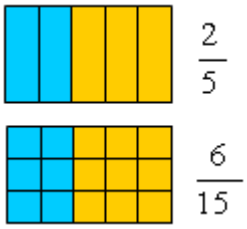
Fracciones y números decimales.
Al dividir el numerador entre el denominador suele obtenerse un número decimal. Por tanto, una fracción puede considerarse como un número decimal.

Ejemplos: $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{12}{5} = 2{,}4$; $\frac{23}{100} = 0{,}23$; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

- Y al revés, los números decimales (con un número finito de cifras decimales o con infinitas cifras decimales periódicas) pueden escribirse como una fracción. En particular, para expresar un número decimal *exacto* en fracción se suprime la coma y se divide por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hubiera.

Ejemplos: $0{,}78 = \frac{78}{100}$; $3{,}2 = \frac{32}{10}$; $0{,}375 = \frac{375}{1000}$.

Dos fracciones son equivalentes cuando valen lo mismo. Así, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.
Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y denominador de la fracción dada por un mismo número distinto de cero.



Simplificar una fracción consiste en igualarla con otra cuyos términos sean más sencillos. Para ello se dividen los dos términos entre el mismo número. Una fracción que no se puede simplificar se llama irreducible.

Ejemplos: a) $\frac{24}{36}=\left(\frac{24:2}{36:2}\right)=\frac{12}{18}=\left(\frac{12:6}{18:6}\right)=\frac{2}{3}$ b) $\frac{375}{1000}=\left[:25\right]=\frac{15}{40}=\left[:5\right]=\frac{3}{8}$.

Condición de igualdad de fracciones:
Si dos fracciones son equivalentes, los productos cruzados de sus términos son iguales. Esto es: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
Esta relación permite encontrar uno de los cuatro términos si se conocen los otros tres.
Ejemplos: a) $\frac{24}{36}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 24 \cdot 3 = 36 \cdot 2 = 72$. b) $\frac{21}{49}=\frac{3}{7}$, ya que $21 \cdot 7 = 49 \cdot 3 = 147$.
c) Las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{12}{15}$ no son iguales, pues $2 \cdot 15 \neq 3 \cdot 12$.
d) ¿Cuánto tiene que valer *x* para que $\frac{2}{3}=\frac{12}{x}$? → Como debe cumplirse que $2 \cdot x = 3 \cdot 12 \Rightarrow$ $2 \cdot x = 36 \Rightarrow x = 18$.

Algunas aplicaciones de las fracciones
1. Fracción de una cantidad.
Ejemplo: ¿Cuánto son los $\frac{2}{7}$ de 210 naranjas?
Los $\frac{2}{7}$ de 210 naranjas = $\frac{2}{7} \cdot 210 = \frac{2 \cdot 210}{7} = \frac{420}{7} = 60$.

- De otra forma:

Si hay 210 naranjas, la séptima parte serán 210 : 7 = 30 naranjas → $\frac{1}{7}$ de 210 = $\frac{210}{7} = 30$.
Por tanto, $\frac{2}{7}$ de 210 = $2 \cdot \frac{210}{7} = 2 \cdot 30 = 60$.

2. Expresión de una parte como una fracción.
Ejemplos:
a) ¿Cuál es la fracción de chicas en una clase de 30 alumnos si, de ellos, 16 son chicas?
La fracción de chicas es: $\frac{16}{30}$.
b) Cuál es la fracción de chicas en una clase en la que hay 14 chicos y 16 chicas?
Como el total son 14 + 16 = 30, la fracción de chicas es $\frac{16}{30}$.

3. Obtención del total a partir de la fracción.
Ejemplo: Si los $\frac{3}{8}$ del dinero de Antonio son 90 €, ¿cuánto dinero tiene Antonio?
Si 90 € son los $\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{90}{3} = 30$ € será $\frac{1}{8}$ de su dinero ⇒ Antonio tendrá $8 \cdot 30 = 240$ €.

- De otra forma: La fracción $\frac{3}{8}$ debe ser equivalente a la fracción $\frac{90}{x}$, siendo *x* el total de dinero que tiene Antonio. Luego $\frac{3}{8}=\frac{90}{x}$ → Como $90 = 3 \cdot 30 \Rightarrow x = 8 \cdot 30 = 240$.

Tema 6. Fracciones — Ejercicios

1. Si una tarta se divide en doce trozos, expresa como fracción:

a) Un trozo de tarta → b) 5 trozos de tarta →

c) Un cuarto de tarta → d) Media tarta →

2. Calcula:

a) $\frac{1}{5}$ de 20 = b) $\frac{1}{5}$ de 45 =

c) $\frac{1}{5}$ de 500 = d) $\frac{1}{5}$ de 225 =

3. Calcula:

a) $\frac{3}{5}$ de 20 = b) $\frac{2}{3}$ de 45 =

c) $\frac{5}{7}$ de 77 = d) $\frac{4}{9}$ de 180 =

4. Expresa como número decimal, con un máximo de 3 cifras decimales, las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{5}$ =	b) $\frac{15}{100}$ =
$\frac{8}{20}$ =	$\frac{121}{100}$ =
$\frac{3}{14}$ =	$\frac{2358}{1000}$ =
$\frac{3}{16}$ =	$\frac{301}{1000}$ =

5. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, ordena de menor a mayor cada uno de los grupos de fracciones.

a) →

b) →

6. Expresa en forma de fracción los siguientes números:

a) 0,123 = b) 1,23 = c) 12,3 = d) 0,00123 =

7. Halla 2 fracciones equivalente a cada una de las siguientes:

a) $\frac{3}{5}$ = b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{7} \rightarrow \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21}$.

d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{21}{12}$ f) $\frac{39}{42}$

8. Encuentra la fracción irreducible equivalente a cada una de las siguientes:

a) $\frac{30}{50}$ = b) $\frac{21}{84}$ = c) $\frac{18}{48}$ = d) $\frac{200}{225}$ =

9. Halla el término desconocido en las siguientes igualdades:

a) $\frac{2}{3} = \frac{20}{x} \Rightarrow$ b) $\frac{3}{5} = \frac{x}{25} \Rightarrow$

c) $\frac{3}{x} = \frac{9}{21} \Rightarrow$ d) $\frac{x}{6} = \frac{27}{18} \Rightarrow$

10. Cristina ha gastado tres séptimas partes de sus ahorros en una guitarra. Si tenía 875 €, ¿cuánto le costó la guitarra?

11. Los dos tercios de la edad de Carmen son 12 años. ¿Cuántos años tiene Carmen?

12. En la clase de Caty hay 5 chicos por cada 6 chicas. ¿Qué fracción del total representan las chicas en la clase de Caty? ¿Puede haber 20 chicas en la clase Caty? ¿Y 15 chicos?

Soluciones:

1. a) $\frac{1}{12}$. b) $\frac{5}{12}$. c) $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. d) $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$. **2**. a) 4. b) 9. c) 100. d) 45.

3. a) 12. b) 30. c) 55. d) 80. **4**. a) 0,2; 0,40; 0,214; 0,187. b) 0,15; 1,21; 2,358; 0,301.

5. a) $\frac{3}{16} < \frac{1}{5} < \frac{21}{100} < \frac{3}{14} < \frac{9}{25} < \frac{8}{20}$. b) $\frac{15}{100} < \frac{301}{1000} < \frac{121}{100} < \frac{2358}{1000}$.

6. a) $\frac{123}{1000}$. b) $\frac{123}{100}$. c) $\frac{123}{10}$. d) $\frac{123}{100000}$. **7**. a) $\frac{6}{10}; \frac{15}{25}$. b) $\frac{4}{6}; \frac{20}{30}$. c) $\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21}$.

d) $\frac{8}{18}; \frac{20}{45}$. e) $\frac{7}{4}; \frac{14}{8}$. f) $\frac{13}{14}; \frac{26}{28}$. **8**. a) $\frac{3}{5}$. b) $\frac{1}{4}$. c) $\frac{3}{8}$. d) $\frac{8}{9}$. **9**. a) 30. b) 15. c) 7. d) 9.

10. 375 €. **11**. 18. **12**. $\frac{6}{11}$. No. Sí, 15 chicos y 18 chicas.

Tema 7. Operaciones con fracciones **Resumen**

Reducción de dos o más fracciones a común denominador

Para reducir fracciones a común denominador se halla un número que sea múltiplo de los denominadores; a continuación se buscan fracciones equivalentes a las dadas pero con ese denominador común.

Un denominador común se obtiene multiplicando los denominadores de todas las fracciones. Aunque sea más costoso, se prefiere hallar fracciones con el menor denominador común, que se obtiene calculado el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo:

Dadas las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{12}$, las equivalentes a ellas con el mismo denominador son, respectivamente, $\frac{3\cdot 12}{8\cdot 12}$ y $\frac{7\cdot 8}{12\cdot 8}$. Esto es: $\frac{36}{96}$ y $\frac{56}{96}$.

- Si optamos por hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores, mcm(8, 12) = 24, las fracciones obtenidas serán: $\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}$ y $\frac{7\cdot 2}{12\cdot 2}$. Esto es: $\frac{9}{24}$ y $\frac{14}{24}$. (Es evidente que estas fracciones son más cómodas de manejar que las anteriores).

Comparación de fracciones

- Si las fracciones tienen el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo: $\frac{9}{17} < \frac{12}{17}$, pues 9 < 12. Igualmente, $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$.

- Si las fracciones tienen el mismo numerador es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo: $\frac{9}{17} < \frac{9}{14}$, pues 17 > 14. Igualmente, $\frac{5}{9} < \frac{5}{7}$.

- Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, se reducen a común denominador y se comparan mediante el criterio anterior; aunque la forma matemática preferida es la aplicación de la regla que se indica más abajo. (No obstante, la forma más rápida de comparar fracciones es hallar su valor con la calculadora y comparar sus resultados.)

Ejemplo: ¿Qué fracción es mayor, $\frac{9}{21}$ o $\frac{31}{70}$?

Como las fracciones equivalentes a ellas con el mismo denominador son $\frac{9\cdot 70}{21\cdot 70} = \frac{630}{1470}$ y $\frac{31\cdot 21}{70\cdot 21} = \frac{651}{1470}$, entonces $\frac{9}{21} < \frac{31}{70}$.

- Con la calculadora, $\frac{9}{21} = 0{,}42857\ldots$ y $\frac{31}{70} = 0{,}44285\ldots$

Regla de comparación de fracciones: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

Ejemplo: ¿Qué fracción es mayor, $\frac{9}{19}$ o $\frac{33}{71}$? → Multiplicando en cruz se tiene: $9 \cdot 71 = 639$; $33 \cdot 19 = 627$. Como $9 \cdot 71 > 33 \cdot 19 \Rightarrow \frac{9}{19} > \frac{33}{71}$.

Suma y resta de fracciones

- Si las fracciones tienen el mismo denominador: la fracción suma o resta es la que tiene por numerador la suma o resta de los numeradores y por denominador el común.

Ejemplo: a) $\frac{4}{15}+\frac{7}{15}=\frac{4+7}{15}=\frac{11}{15}$. b) $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{4+5-2}{9}=\frac{7}{9}$.

- Si las fracciones tienen distinto denominador: se reducen a común denominador y se procede como antes.

Ejemplo: a) $\frac{2}{9}+\frac{5}{12}=\frac{8}{36}+\frac{15}{36}=\frac{8+15}{36}=\frac{23}{36}$. b) $\frac{7}{15}-\frac{2}{9}=\frac{21}{45}-\frac{10}{45}=\frac{21-10}{45}=\frac{11}{45}$.

Suma o resta de números enteros y fracciones

Si se escribe el número como una fracción con denominador 1, la operación se reduce a alguna de las anteriores.

Ejemplos: a) $3+\frac{4}{15}=\frac{3}{1}+\frac{4}{15}=\frac{3\cdot15+4\cdot1}{15}=\frac{49}{15}$. b) $4-\frac{3}{7}=\frac{4}{1}-\frac{3}{7}=\frac{4\cdot7-3\cdot1}{7}=\frac{25}{7}$.

Multiplicación de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador, el producto de los denominadores. Esto es: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Ejemplo: a) $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{4\cdot5}{7\cdot9}=\frac{20}{63}$. b) $\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10}=\frac{5\cdot3}{12\cdot10}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$.

Multiplicación de un número entero por una fracción

La fracción resultante tiene como numerador el producto del número por el numerador; el denominador será el mismo. Esto es: $a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{d}$ y $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$.

Ejemplos: a) $7\cdot\frac{5}{11}=\frac{7\cdot5}{11}=\frac{35}{11}$. b) $\frac{3}{14}\cdot6=\frac{3\cdot6}{14}=\frac{18}{14}=\frac{9}{7}$.

División de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y como denominador, el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Esto es, sus términos se multiplican en cruz $\rightarrow$ $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Ejemplos: a) $\frac{6}{7}:\frac{3}{9}=\frac{6\cdot9}{7\cdot3}=\frac{54}{21}=\frac{18}{7}$. b) $\frac{3}{11}:\frac{5}{7}=\frac{3\cdot7}{11\cdot5}=\frac{21}{55}$.

División de un número entero por una fracción y de una fracción por un número entero

Escribiendo el número entero como una fracción con denominador 1 la operación se hace como se ha indicado en general. Esto es: $a:\frac{c}{d}=\frac{a}{1}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{c}$; $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b\cdot c}$.

Ejemplos: a) $4:\frac{5}{7}=\frac{4}{1}:\frac{5}{7}=\frac{28}{5}$. b) $\frac{3}{8}:6=\frac{3}{8}:\frac{6}{1}=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$.

Prioridad de operaciones y uso de paréntesis

Cuando las operaciones aparecen combinadas, primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones; por último, las sumas y restas.

Ejemplos: a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{6}{9}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{15}{20}+\frac{4}{20}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{19}{20}=\frac{19}{180}$

b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\left(\frac{6}{9}-\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3}{36}+\frac{1}{5}=\frac{15}{180}+\frac{36}{180}=\frac{51}{180}=\frac{17}{60}$.

Tema 7 . Operaciones con fracciones — Ejercicios

1. Reduce a común denominador los siguientes pares de fracciones:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{6} \rightarrow \frac{2}{5}=\frac{12}{30}; \frac{1}{6}=\frac{5}{30} \rightarrow \frac{12}{30}$ y $\frac{5}{30}$. b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12} \rightarrow$

c) $\frac{3}{15}$ y $\frac{3}{12} \rightarrow$ d) $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{15} \rightarrow$

2. Para cada uno de los pares de fracciones anteriores, ¿cuál de ellas es la mayor?

a) $\frac{2}{5}=\frac{12}{30} > \frac{1}{6}=\frac{5}{30}$. b)

c) d)

3. Reduce a común denominador las fracciones:

a) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \rightarrow (\text{mcm} = 30) \rightarrow \frac{2\cdot6}{5\cdot6}, \frac{1\cdot10}{3\cdot10}, \frac{1\cdot5}{6\cdot5} \rightarrow \frac{12}{30}, \frac{10}{30}, \frac{5}{30}$.

b) $\frac{1}{3}, \frac{7}{15}, \frac{5}{12} \rightarrow$

c) $\frac{2}{9}, \frac{4}{15}, \frac{11}{30} \rightarrow$ d) $\frac{2}{7}, \frac{8}{21}, \frac{11}{42} \rightarrow$

4. Halla:

a) $\frac{4}{11}+\frac{5}{11}-\frac{2}{11}$. b) $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}-\frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{9}+\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{12}-\frac{2}{9}$

5. Halla:

a) $3+\frac{1}{5}=$ b) $2-\frac{3}{4}=$ c) $\frac{5}{11}+6=$

6. Calcula, simplificando el resultado:

a) $\frac{5}{12}\cdot\frac{9}{15}=$ b) $\frac{7}{18}\cdot\frac{6}{7}=$ c) $\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{32}=$

7. Calcula, simplificando el resultado:

a) $10\cdot\frac{9}{15}=$ b) $3\cdot\frac{6}{11}=$ c) $\frac{8}{15}\cdot12=$ d) $\frac{90}{120}\cdot60=$

8. Calcula, simplificando el resultado:

a) $\frac{5}{12}:\frac{4}{15}=$ b) $\frac{7}{18}:\frac{14}{15}=$ c) $\frac{8}{15}:\frac{12}{15}=$

9. Calcula, simplificando el resultado:

a) $4:\frac{2}{3}=$ b) $3:\frac{16}{5}=$ c) $\frac{50}{3}:5=$ d) $\frac{28}{3}:4=$

10. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)=$

b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=$

c) $4-\frac{3}{7}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)=$

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right):\frac{5}{6}-\frac{1}{5}=$

11. Luis, Felipe y Pedro compran una pizza. Luís se come dos quintos de pizza, Felipe un tercio y Pedro el resto. ¿Qué fracción de pizza se comió Pedro? ¿Quién comió menos?

12. Carmen gastó ayer un tercio de lo que tenía. Si hoy ha gastado la mitad de lo que le quedó, ¿qué fracción le queda del dinero inicial? Si tenía 450 €, ¿cuánto ha gastado y cuánto le queda?

Soluciones:

1. b) $\frac{4}{12}$ y $\frac{5}{12}$. c) $\frac{12}{60}$ y $\frac{15}{60}$. d) $\frac{25}{45}$ y $\frac{21}{45}$. **2**. a) $\frac{2}{5}$. b) $\frac{5}{12}$. c) $\frac{3}{12}$. d) $\frac{5}{9}$.

3. a) $\frac{12}{30}, \frac{10}{30}, \frac{5}{30}$. b) $\frac{20}{60}, \frac{28}{60}, \frac{25}{60}$. c) $\frac{20}{90}, \frac{24}{90}, \frac{33}{90}$. d) $\frac{12}{42}, \frac{16}{42}, \frac{11}{42}$.

4. a) $\frac{7}{11}$. b) $\frac{4}{7}$. c) $\frac{43}{36}$. d) $\frac{13}{36}$. **5**. a) $\frac{16}{5}$. b) $\frac{5}{4}$. c) $\frac{71}{11}$. **6**. a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{5}{12}$.

7. a) $\frac{18}{5}$. b) $\frac{18}{11}$. c) $\frac{32}{5}$. d) 180. **8**. a) $\frac{75}{48}$. b) $\frac{5}{12}$. c) $\frac{2}{3}$. **9**. a) 6. b) $\frac{15}{16}$. c) $\frac{10}{3}$. d) $\frac{7}{3}$.

10. a) $\frac{49}{180}$. b) $\frac{47}{180}$. c) $\frac{218}{63}$. d) $-\frac{1}{15}$. **11**. $\frac{4}{15}$. Pedro. **12**. $\frac{1}{3}$. Gasto 300 €; le quedan 150 €.

Tema 7. Problemas de fracciones

1. De los animales del zoo, $\frac{2}{3}$ son mamíferos y $\frac{1}{5}$ aves. ¿Qué fracción representan conjuntamente los mamíferos y las aves?

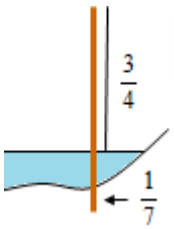
2. Una de las naves espaciales, el Voyager II, salió de La Tierra el 20-8-1977. Tardó en llegar al planeta Júpiter $1+\frac{8}{9}$ de año; de Júpiter a Saturno $2+\frac{1}{8}$ de año; de Saturno a Urano, $4+\frac{3}{7}$ de año; y de Urano a Neptuno, $3+\frac{4}{7}$ de año.

a) ¿Cuántos años tardó en llegar a Neptuno? →

b) ¿Dónde estaba 5 años después de despegar?

3. Una persona tiene $\frac{1}{4}$ de su fortuna en joyas, y $\frac{2}{5}$ en terrenos. ¿Qué parte de su fortuna tiene entre joyas y terrenos? ¿Cuánto le falta o le sobra para llegar a la mitad de su fortuna?

4. Un poste tiene $\frac{1}{7}$ de su longitud clavado en el fondo de un estanque, y $\frac{3}{4}$ de su longitud, fuera del agua. ¿Qué parte del poste está en contacto con el agua? Si el poste mide 28 m, cuántos metros están clavados, cuantos en el agua y cuántos fuera del agua?



5. Julia emprende una marcha de 30 km. En la primera hora recorre $\frac{1}{4}$ del trayecto, y en la segunda, $\frac{1}{3}$. ¿Qué parte del camino ha recorrido en las dos primeras horas? ¿Cuántos km le faltan para el final del trayecto?

6. Claudia tenía 16 € y se ha gastado los $\frac{3}{4}$ en un regalo. Ángel tenía 30 € y se ha gastado los $\frac{2}{5}$. ¿Quién se ha gastado más dinero?

7. Jimena ha colocado $\frac{1}{30}$ de las piezas de un puzzle y después Ramiro ha colocado los $\frac{3}{100}$. En un movimiento accidental se han descolocado $\frac{1}{50}$ de las piezas. ¿Qué fracción de puzzle ha quedado intacta? Si el puzzle tuviese 600 piezas, cuántas estarían colocadas? ¿Puede tener el puzzle 250 piezas?

8. Alberto ha resuelto bien los $\frac{2}{3}$ de los ejercicios de una prueba y su amiga Irene los $\frac{3}{5}$. ¿Quién tendrá mejor nota?

9. Adrián sale de su casa con 32 €. En diversas compras se gasta los $\frac{3}{8}$ de esa cantidad. ¿Qué parte le queda? ¿Cuántos euros ha gastado?

10. Un contribuyente paga al principio del año la mitad de sus impuestos; al cabo de seis meses, la tercera parte de ellos, y al final del año paga el resto. ¿Qué parte de los impuestos paga al final del año? Suponiendo que tiene que pagar 1440 €, ¿qué cantidad ha pagado en cada uno de los tres plazos?

Soluciones: **1**. 13/15. **2**. $12+\frac{1}{72}$ de año. Entre Saturno y Urano. **3**. 13/20. Le sobran 3/20. **4**. 3/28. 4, 3 y 21 m, respectivamente. **5.** 7/12. Le faltan 5/12 = 12,5 km. **6**. Los dos el mismo, 12 €. **7**. 13/300. 26. No. **8**. Alberto, pues $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$. **9**. $\frac{5}{8}$. 8 €. **10**. $\frac{1}{6}$. 720, 480 y 240 €, respectivamente.

Tema 8. (I) Proporcionalidad — Resumen

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 3, por 10,…, la magnitud B (de valor inicial 5) se multiplica por 2, por 3, por 10, …

Tabla 1. Directamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	6	20	**30**	***x***	**1**
Magnitud B	**5**	10	15	50	***y***	**60**	***k***

.

Propiedad: si dos magnitudes son directamente proporcionales, el cociente de las cantidades correspondientes es constante: $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{20}{50}=...=\frac{30}{y}=\frac{x}{60}$.

Esta propiedad permite encontrar la cantidad *y*, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad *x* de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.
Ejemplo: Para las magnitudes dadas en la tabla, los valores desconocidos *y* y *x* se pueden determinar fácilmente, ya que si $\frac{2}{5}=\frac{30}{y}$, entonces $y = 75$; y si $\frac{2}{5}=\frac{x}{60}$, entonces $x = 24$.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o cuando al dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 4, por 5, …, la magnitud B (de valor inicial 50) se divide por 2, por 4, por 5, …

Tabla 2. Inversamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	8	10	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	10	***y***	**2,5**	***k***

.

Propiedad: si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante: $2\cdot50 = 4\cdot25 = 8\cdot12{,}5 = 10\cdot10 = ... = 20\cdot y = x\cdot2{,}5$.

Esta propiedad permite encontrar la cantidad *y*, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad *x* de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.
Ejemplo: Para las magnitudes dadas en la tabla, los valores desconocidos *y* y *x* se pueden determinar fácilmente, ya que si $2\cdot50 = 20\cdot y$, entonces $y = 5$; y si $2\cdot50 = x\cdot2{,}5$, entonces $x = 40$.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad directa
En los problemas de proporcionalidad resulta útil saber cuánto vale B cuando A = 1. Ese valor se halla dividiendo el valor de B por su correspondiente en A.
Ejemplo: En la Tabla 1, el valor de B cuando A = 1 es 5 : 2 = 2,5. Es el valor de *k* en la tabla, que también puede obtenerse de la igualdad $\frac{2}{5}=\frac{1}{k}$ → al dividir por 2 el numerador también hay que dividir por 2 el denominador. Por tanto, $k = 2{,}5$.

- Conociendo el valor de *k*, los valores de B se hallan multiplicando los de A por *k*.
- Conociendo el valor de *k*, los valores de A se hallan dividiendo los de B por *k*.

Ejemplo: a) Para la Tabla 1, si A = 3 ⇒ B = 3 · 2,5 = 7,5; si A = 10 ⇒ B = 10 · 2,5 = 25.
b) a) Para la Tabla 1, si B = 10 ⇒ A = 10 : 2,5 = 4; si B = 40 ⇒ A = 40 : 2,5 = 16.

Regla de tres simple directa

Un problema de regla de tres directa es el siguiente: Por la compra 5 kg de patatas se han pagado 7,5 €. ¿Cuánto deberá pagarse por la compra de 12 kg de patatas?

- Lo primero es darse cuenta que las magnitudes "kilogramos de patatas" y "cantidad a pagar" son directamente proporcionales. → "*A más kilos, más dinero*".

Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si a 5 kg → 7,5 €

a 12 kg → x € $\Rightarrow \dfrac{5}{12}=\dfrac{7{,}5}{x} \Rightarrow 5\cdot x = 7{,}5\cdot 12 \Rightarrow 5\cdot x = 90 \Rightarrow x=\dfrac{90}{5}=18$ €.

Recuerda: Al tratarse de fracciones equivalentes, "los productos *cruzados* son iguales".

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el precio de 1 kg de patatas. Este valor es: $\dfrac{7{,}5}{5}=1{,}5$ €. En consecuencia, el coste de 12 kg será 12 · 1,5 = 18 kg.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad inversa

En los problemas de proporcionalidad inversa el valor de B cuando A = 1 se halla multiplicando cualquier valor conocido de B por su correspondiente en A.

Ejemplo: En la Tabla 2, el valor de B cuando A = 1 es 50 · 2 = 100.
Es el valor de *k* en la tabla, que también puede obtenerse de la igualdad $2\cdot 50 = 1\cdot k \Rightarrow k = 100$.

Tabla 2. Inversamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	8	10	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	10	***y***	**2,5**	***k***

- Conociendo el valor de *k*, los valores de B se hallan dividiendo *k* entre los valores de A.
- Conociendo el valor de *k*, los valores de A se hallan dividiendo *k* entre los valores de B.

Ejemplo: a) Para la Tabla 2, si A = 2 ⇒ B = 100 : 2 = 50; si A = 20 ⇒ B = 100 : 20 = 5.
b) Para la Tabla 2, si B = 10 ⇒ A = 100 : 10 = 10; si B = 8 ⇒ A = 100 : 8 = 12,5.

Regla de tres simple inversa

Un problema de regla de tres inversa es el siguiente: Dos pintoras encalan una pared en 14 horas, ¿cuántas horas tardarían en encalarla entre 5 pintoras?

- Lo primero es darse cuenta que las magnitudes "número de pintoras" y "tiempo en encalar" son inversamente proporcionales. → "*A más pintoras, menos tiempo*".

Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si 2 pintoras → tardan 14 h

5 pintoras → tardarán x h ⇒ $2 \cdot 14 = 5 \cdot x \Rightarrow 28 = 5 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{28}{5} = 5{,}6$ h.

En las reglas de tres inversas "los productos *horizontales* son iguales".

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el tiempo que tardaría una sola pintora. Ese tiempo sería de 28 horas → 2 · 14 = 28; el doble que si lo hacen entre las dos. En consecuencia, entre 5 pintoras emplearían $\dfrac{28}{5}=5{,}6$ horas.

Tema 8. (I) Proporcionalidad Ejercicios

1. Completa los cuadros en blanco en la siguiente tabla:

Magnitudes DIRECTAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9			1
Magnitud B	**9**				45	90	

¿Por qué número hay que multiplicar las cantidades de la magnitud A para obtener sus correspondientes en la magnitud B?

→

2. Completa los cuadros en blanco en la siguiente tabla:

Magnitudes INVERSAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9			1
Magnitud B	**9**				45	90	

3. Indica, explicando el motivo, cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales, inversamente proporcionales, o no son proporcionales:

a) Los kilos de carne que compra Andrés y el dinero que paga por ello.

→

b) El tiempo que tarda Andrés en ir al supermercado y la velocidad que lleva.

→

c) El tiempo que tarda Andrés en ir al supermercado y lo que paga por la carne que compra.

→

d) Lo que pesa Andrés y lo que mide de estatura.

→

4. El kilo de carne está a 12,30 €. Si Andrés ha comprado 2,400 kg, ¿cuánto habrá pagado?

5. Otro día, Andrés pagó 13,50 € por 1,5 kilos de carne. ¿Cuánto pagó Raquel si compró 2,5 kilos de la misma carne ese día?

6. Si Andrés va caminando con una velocidad de 3 km/h tarda 20 minutos en llegar al supermercado. ¿Cuánto tardó su vecina que fue caminando con una velocidad de 5 km/h?

7. En un instituto que tiene 735 alumnos, cuatro de cada siete alumnos son chicas. ¿Cuántos chicos y chicas hay?

8. Para vaciar un contenedor de ladrillos 8 obreros han empleado 3 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 12 obreros?

9. Por trabajar 2,5 horas a Pedro le han pagado 20 €. ¿Cuánto le pagarán otro día por trabajar 4 horas?

10. Para hacer una zanja 3 excavadoras han empleado 4 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 4 excavadoras?

11. El coste de un aparcamiento se calcula por minutos. Si Andrea ha pagado 2,70 € por 1 hora y media, ¿cuánto pagará Víctor que aparcó durante 2 h y 20 min?

12. Un coche, a velocidad constante de 120 km/h, tarda 1,75 horas en realizar un trayecto. ¿Cuánto tiempo tardaría a una velocidad constante de 100 km/h?

Soluciones:

1.

Magnitudes DIRECTAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9	10	20	1
Magnitud B	**9**	27	36	40,5	45	90	4,5

Por 4,5.

2.

Magnitudes INVERSAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9	0,4	0,2	1
Magnitud B	**9**	3	2,25	2	45	90	18

3. a) Directamente proporcionales.
b) Inversamente proporcionales.
c) y d) nada.
4. 29,52 €. **5**. 22,50 €. **6**. 12 min.
7. 315 chicos y 420 chicas.
8. 2 h. **9**. 32 €.
10. 3 h. **11**. 4,2 €. **12**. 2 h, 6 min.

Tema 8. (II) Porcentajes — Resumen

Porcentajes

Un tanto por ciento es una fracción con denominador 100.
El tanto por ciento relaciona directamente proporcional ese tanto con el valor 100.
El tanto por ciento también se llama porcentaje. Se simboliza con % → 7 por ciento = 7 %.
El tanto por ciento indica lo que se toma de algo que se ha dividido en 100 partes iguales.

Ejemplo:

Un 16 por ciento (16 %), es la fracción $\frac{16}{100}$. Indica que las magnitudes A y B están relacionadas proporcionalmente mediante las cantidades 16 y 100, respectivamente.

A, porcentaje (%)	**16**	32	…	*x*	**24**
B, cantidad total	**100**	200	…	**1200**	*y*

- Por tratarse de una proporcionalidad directa se cumple: $\frac{16}{100} = \frac{32}{200} = ... = \frac{x}{1200} = \frac{24}{y}$.
- Como $\frac{16}{100}$ = 0,16, para hallar el 16 % de cualquier cantidad se multiplica por 0,16.

Ejemplo:

El 16 % de 1200 € = la fracción $\frac{16}{100}$ de 1200 € = $\frac{16}{100} \cdot 1200 = 0{,}16 \cdot 1200 = 192$ €.

- En la práctica, para hallar el 16 % de 1200 basta con multiplicar por 0,16.
  16 % de 1200 = 1200 · 0,16 = 192 €.

Tanto por ciento de una cantidad

Lo que se ha calculado en el ejemplo anterior es el porcentaje de una cantidad.
Y para hallarlo hemos multiplicado por la fracción correspondiente. En este caso por $\frac{16}{100}$ = 0,16.

- También puede calcularse aplicando la propiedad de la proporción directa.
  Como $\frac{16}{100} = \frac{x}{1200} \Rightarrow 16 \cdot 1200 = 100 \cdot x \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 1200}{100} = 192$ €.
- También puede calcularse aplicando la regla de tres directa.
  Si a 100 € → 16 €

  a 1200 € → *x* € ⇒ $100 \cdot x = 16 \cdot 1200 \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 1200}{100} = 192$ €.

Cantidad correspondiente a un porcentaje

Para hallar la cantidad de la que proviene un porcentaje puede dividirse por el tanto por ciento.

Ejemplo:

¿Cuánto debe valer *y* sabiendo que su 16 % vale 24?

Observando la tabla, se cumple que $\frac{16}{100} = \frac{24}{y} \Rightarrow 16 \cdot y = 24 \cdot 100 \Rightarrow y = \frac{24 \cdot 100}{16} = 150$.

- También puede calcularse aplicando la regla de tres directa.
  Si a 100 € → 16 €

  a *y* € → 24 € ⇒ $100 \cdot 24 = 16 \cdot y \Rightarrow y = \frac{24 \cdot 100}{16} = 150$ €.

Aumentos porcentuales

Cuando a una cantidad inicial se le añade un tanto por ciento de la misma cantidad, se habla de aumentos porcentuales. (Es lo propio de las subidas de precios).

Ejemplo: Si el precio de los libros de texto ha aumentado, del año pasado a este, el 12 %, ¿cuánto valdrá este año lo que valía 230 € el pasado?

La cantidad que aumenta es el 12 % de 230 = 0,12 · 230 = 27,6 €.

El precio que debe pagarse es lo que valía + el aumento. Esto es: 230 € + 27,6 € = 257,6 €.

Calculo directo de aumentos porcentuales

1. Para aumentar un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por $1+\frac{porcentaje}{100}$.

Ejemplo: Si el precio de los libros de texto ha aumentado del año pasado a este el 12 %, ¿cuánto valdrá este año lo que valía 230 € el pasado?

La cantidad a pagar será: $230\cdot(1+0{,}12) = 230\cdot 1{,}12 = 257{,}6$ €.

2. Para aumentar un porcentaje a una cantidad se puede hacer una regla de tres directa, teniendo en cuenta que a 100 le corresponde 100 + *porcentaje*.

Ejemplo: Si el precio de un juego de ordenador ha aumentado, del año pasado a este, un 7 %, ¿cuánto valdrá este año si el pasado costaba 32 €?

El planteamiento es:

Si a 100 € $\rightarrow$ 107 € (eso es lo que supone un aumento del 7 %)

a 32 € $\rightarrow$ x € $\Rightarrow$ $100 \cdot x = 107 \cdot 32 \Rightarrow x = \frac{107\cdot 32}{100} = 34{,}24$ €.

Sugerencia. Alterna el método de solución en estos dos ejemplos y comprueba que el resultado el mismo.

Disminuciones porcentuales

Cuando a una cantidad inicial se le quita un tanto por ciento de la misma cantidad, se habla de disminuciones porcentuales. (Es lo propio de las rebajas de precios).

Ejemplo: Si el precio de un teléfono móvil se ha rebajado un 20 % ¿cuánto costará si antes de las rebajas costaba 245 €?

La cantidad rebajada es el 20 % de 245 = 0,20 · 245 = 49 €.

El precio que debe pagarse es lo que valía menos la rebaja. Esto es: 245 – 49 = 196 €.

Calculo directo de aumentos porcentuales

1. Para disminuir un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por $1-\frac{porcentaje}{100}$.

Ejemplo: Si el precio de un teléfono móvil se ha rebajado un 20 % ¿cuánto costará si antes de las rebajas costaba 245 €?

La cantidad a pagar será: $245\cdot(1-0,20) = 245\cdot 0,80 = 196$ €.

2. Para disminuir un porcentaje a una cantidad se puede hacer una regla de tres directa, teniendo en cuenta que a 100 le corresponde 100 – *porcentaje*.

Ejemplo: Si el precio de un juego de ordenador se ha rebajado (disminuido) un 8 %, ¿cuánto valdrá si antes de la rebaja valía 48 €?

El planteamiento es:

Si a 100 € $\rightarrow$ 92 € (eso es lo que supone una rebaja del 8 %)

a 48 € $\rightarrow$ x € $\Rightarrow$ $100 \cdot x = 92 \cdot 48 \Rightarrow x = \frac{92\cdot 48}{100} = 44{,}16$ €.

Tema 8. (II) Porcentajes Ejercicios

1. Calcula el 10 % de las siguientes cantidades:

a) 300 → b) 55 →

c) 2500 → d) 20,4 → 10 % de 20,4 = 0,10 · 20,4 = 2,04.

¿Has descubierto un método rápido para calcularlo?

→

2. Calcula el 20 % de las siguientes cantidades:

a) 200 → b) 5000 →

c) 20 → 20 % de 20 = 0,20 · 20 = 4. d) 5 →

¿Has descubierto un método rápido para calcularlo?

→

3. Calcula el 90 % de las siguientes cantidades:

a) 90 → b) 800 →

c) 240 → d) 3,4 →

¿Has descubierto un método rápido para calcularlo?

→ Para hallar el 90 % de una cantidad se multiplica dicha cantidad por 0,90.

4. Halla el valor de los siguientes porcentajes:

a) El 18 % de 2500 →

b) El 27 % de 120 →

c) El 9 % de 15300 →

d) El 6,5 % de 48,3 →

5. En una clase de 30 alumnos el 60 % son chicas, ¿cuántos chicas hay?

6. En la misma clase, el 70 % de los alumnos ha aprobado Matemáticas. ¿Cuántos alumnos de esa clase han suspendido Matemáticas?

7. Carmen, que ganaba 1800 euros al mes, ha ascendido en la empresa y le han subido el sueldo un 9 %. ¿Cuánto ganará ahora?

8 ¿Por qué número hay que multiplicar para incrementar una cantidad en un 9 %? Incrementa las cantidades 15300, 2500 y 320 en un 9 %.

→

→ 15300 · 1,09 =

→ 2500… → 320

9. El precio de un automóvil se ha rebajado el 6 %. Si ahora cuesta 8930 €, ¿cuánto costaba antes de la rebaja?

10. ¿Por qué número hay que multiplicar para disminuir una cantidad en un 6 %? Disminuye las cantidades 12450, 980 y 700 en un 6 %.

11. Sonia compra un libro que valía 16,40 €. Si le hacen un 30 % de descuento, ¿cuánto pagará por el libro?

12. Al comprar un frigorífico que valía 1420 € nos han rebajado 120 €. ¿Qué descuento nos han hecho?

13. El sueldo de los trabajadores de una empresa va a subir un 2 %. Indica en la tabla siguiente los sueldos de los distintos trabajadores:

Sueldo actual (€/mes)	3200 €	1800 €	780 €
Nuevo sueldo (+ 2 %)			

Un trabajador gana después de la subida 2040 €. ¿Cuánto ganaba antes?

14. Las rebajas anuncian un descuento del 40 %. Indica en la tabla siguiente los precios rebajados

Antes	100 €	200 €	32 €	40,40 €
Precios rebajados				

Tema 9. (I) Expresiones algebraicas **Resumen**

¿Qué es una expresión algebraica?

Son las expresiones en las que aparecen números y letras, unidos por las operaciones habituales.

Ejemplos: Son expresiones algebraicas las siguientes:

a) $a+2\cdot b-3$ b) $2\cdot x$ c) $x^2-2\cdot x$ d) $2\cdot x=14$ e) $2\cdot a^2\cdot b-4\cdot b+5$

- El punto de multiplicar suele quitarse cuando está entre números y letras o entre letras. Así, las expresiones algebraicas del ejemplo anterior se pueden escribir como sigue:

)a $+2\cdot b-3=a+2b-3$ b) $2\cdot x=2x$ d) $2x=14$ e) $2a^2b-4b+5$

- Las letras pueden tomar valores. Esos valores suelen indicarse: decir cuánto valen. Otras veces hay que calcularlos: descubrirlos.

Ejemplos: a) Si se dice que a = 5 y b = –7, entonces, las expresiones algebraicas:

$a+2b-3$ = 5 + 2 · (–7) – 3 = 5 – 14 – 3 = 5 – 17 = –12.

$2a^2b-4b+5$ = $2\cdot5^2\cdot(-7)-4\cdot(-7)+5$ = 2 · 25 · (–7) + 28 + 5 = –350 + 33 = –317.

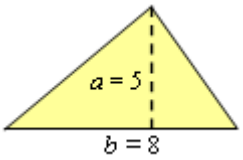
Observa que al sustituir las letras por números hay que poner los puntos de multiplicar.

b) S x = 3, entonces: $2x$ = 2 · 3 = 6; $x^2-2\cdot x$ = 3^2 – 2 · 3 = 9 – 6 = 3.

c) La expresión $2x=14$ es una ecuación. En este caso se trata de encontrar el valor que debe tomar x para que se cumpla la igualdad. Es fácil ver que el único valor posibles es x = 7.

- Las fórmulas son expresiones algebraicas.

Ejemplo: La fórmula que da el área de un triangulo es $A=\frac{b\cdot a}{2}$, donde b representa la base y a la altura. Si la base mide 8 y altura 5, el área del triángulo es: $A=\frac{8\cdot5}{2}=20$.



Monomios

Son las expresiones algebraicas más simples. Sólo tienen un término.

Un término es: un número; una letra; o un producto de números por letras.

Ejemplos: a) Cualquier número es un término. Así, 8, –3 o $\frac{4}{3}$ son términos, que por no tener ninguna letra multiplicando se llaman términos independientes.

b) Cualquier letra es un término. Así, a, b o x son términos.

c) Cualquier producto de números por letras es un término. Así, $3\cdot a$, $-4\cdot a\cdot x$ o $x\cdot x$ son términos. Esos términos suele escribirse omitiendo los puntos. Así: $3a$, $-4ax$ o x^2.

d) La expresión $2a^2b-4b+5$ no es un monomio, pues esta formada por tres términos. Por tanto, si hay sumas o restas la expresión no es un monomio. Se llamará polinomio.

- En un monomio, al número se le llama coeficiente; a la letra o letras que lo multiplican se le llama parte literal.

Ejemplo: La parte literal de $3a$, $-4ax$ y x^2 es, respectivamente, a, ax y x^2. Sus coeficientes, también respectivamente, son: 3, –4 y 1.

Observa que cuando la parte literal no lleva número, su coeficiente es 1; y si va sola con signo negativo, su coeficiente es –1. No se ponen por comodidad. Así, los coeficientes de $-ab^2$ y de x^3 son, respectivamente, –1 y 1.

- El grado de un monomio es el grado de la parte literal, que es la suma de los grados de las letras que la forman.

Ejemplo: El grado de $3a$ es 1; el grado de x^2 es 2; el grado de $2a^2b$ es 3.

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Ejemplos: a) Los monomios $3a$ y $5a$ son semejantes.

b) También son semejantes los monomios: x^2 y $6x^2$; y, $2a^2b$ y $3a^2b$.

c) No son semejantes: $3a$ y $2ab$. Tampoco lo son $2x^2$ y $3x$.

Suma y resta de monomios

Sólo pueden sumarse o restarse los monomios semejantes, los que tienen la misma parte literal.

Cuando dos monomios no son semejantes, no pueden agruparse; la operación se deja indicada.

Ejemplos: a) Los monomios $3a$ y $5a$ pueden sumarse y restarse. Esto es, pueden hacerse las operaciones: $3a+5a$ y $3a-5a$

b) Los monomios $2x^2$ y $3x$ no pueden sumarse ni restarse. Las operaciones $2x^2+3x$ y $2x^2-3x$ no pueden realizarse.

- Para sumar (o restar) monomios se suman (o restan) los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Ejemplos:

a) $3a+5a=(3+5)a=8a$; b) $3a-5a=(3-5)a=-2a$; c) $a+a+a=3a$;

d) $2x^2+3x$ se deja indicada, como está.

- La suma y resta de expresiones algebraicas cumplen las mismas propiedades que la suma y resta de números. Habrá que tener en cuenta las reglas de los signos.

Ejemplos:

a) $2a+7a=7a+2a=9a$; b) $5a-(a-3a)=5a-(-2a)=5a+2a=7a$.

Producto de monomios

Pueden multiplicarse cualquier tipo de monomios entre sí.

Para multiplicar dos monomios se multiplican números por números y letras por letras.

Ejemplos:

a) $(3a)\cdot(5a)=(3\cdot5)\cdot(a\cdot a)=15a^2$; b) $(3a)\cdot(-5a)=(3\cdot(-5))\cdot(a\cdot a)=-15a^2$;

c) $a\cdot a\cdot a=a^3$; d) $(2x^2)\cdot(3x)=2\cdot3\cdot x^2\cdot x=6x^3$.

$xxx=x^3$
$a^2a^4=a^6$
$yy^5y^7=y^{13}$
$5n^5n^2n=5n^8$

División de monomios

Pueden dividirse cualquier tipo de monomios entre sí.

Para dividir dos monomios se dividen números entre números y letras entre letras. La parte de la expresión que no pueda simplificarse se dejará indicada en forma de fracción

Ejemplos:

a) $\frac{12a^2}{3a}=\frac{12}{3}\cdot\frac{a^2}{a}=4a$; b) $\frac{5x^2}{15x}=\frac{5}{15}\cdot\frac{x^2}{x}=\frac{1}{5}x=\frac{x}{5}$;

c) $\frac{-10x^2y}{5xy^2}=\frac{-10}{5}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{y}{y^2}=-2x\cdot\frac{1}{y}=-\frac{2x}{y}$.

Tema 9. (I) Expresiones algebraicas — Ejercicios

1. Calcula, para $a = 2$ y $b = -3$ y $x = 2$, el valor de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a + 2b - 3 \rightarrow$

b) $3x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{x}{2} \rightarrow$

c) $2a^2b - 4b + 5 \rightarrow$

2. Cuáles de las siguientes expresiones son monomios (justifica tu respuesta):

a) $3a^2b$ b) $\frac{5x^2}{3}$ c) $2x^2 - 8$ d) $\frac{-3ab}{5}$

3. Para los monomios anteriores (los que lo sean) indica el coeficiente y la parte literal.

a) $3a^2b \rightarrow$ b) $\frac{5x^2}{3} \rightarrow \frac{5}{3}$ y x^2.

c) $2x^2 - 8 \rightarrow$ d) $\frac{-3ab}{5} \rightarrow$

4. Indica el coeficiente y la parte literal de los siguientes monomios:

a) $-3ab \rightarrow$ b) $-x^3 \rightarrow$

c) $\frac{2a^2b}{5} \rightarrow$ d) $7x^2 \rightarrow$

5. Di el grado de cada uno de los monomios del ejercicio anterior.

a) $-3ab \rightarrow$ b) $-x^3 \rightarrow$ c) $\frac{2a^2b}{5} \rightarrow$ d) $7x^2 \rightarrow$

6. Indica (justificándolo) si son semejantes o no los siguientes pares de monomios:

a) $-3a$ y $2a \rightarrow$ b) $4a^3$ y $4a \rightarrow$

c) $-x^2$ y $\frac{4x^2}{3} \rightarrow$ d) $2ab^2$ y $3ab^2 \rightarrow$

7. Suma o resta, en los casos que puedas:

a) $5a - 3a + 8a =$ b) $3a - (5a - a) =$ c) $2a - 3b =$

d) $3x^2 - x^2 =$ e) $2x^2 + 3x^3 =$ f) $\frac{7}{3}x - \frac{2}{9}x =$

8. Simplifica, agrupando los términos que puedas:

a) $3a+5a-(4a-3)$ =

b) $3a-5a^2-(2a^2+3a)$ =

c) $5x-(3x-6)-4$ =

9. Multiplica los siguientes monomios:

a) $(3a^2)\cdot(7a)$ = b) $(-3a)\cdot(-5a)$ = c) $(2a)\cdot(3a^2)\cdot(a^3)$ =

d) $3\cdot(2x^2)$ = e) $2x\cdot(3-4x)$ = f) $(2ab)\cdot(5ab^2)$ =

10. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{18a}{3}$ = b) $\frac{12x^2}{18x}$ = c) $\frac{8x^2y}{12x}$ =

d) $\frac{-8a}{10a^2}$ = e) $\frac{12x^5}{4x^3}$ = f) $\frac{42x^2y^3}{12xy^4}$ =

11. Escribe las expresiones algebraicas que sirven para hallar:

a) El área de un rectángulo de base *b* y altura *a* →

b) El perímetro de ese mismo rectángulo →

c) El área de un círculo de radio *r* →

12. Halla el valor de las expresiones anteriores cuando *b* = 12 cm, *a* = 7 cm y *r* = 5 cm.

a)

b)

c)

Soluciones

1. a) –7. b) 5. c) –7. **2.** a), b) y d). **3.** a) a^2b y 3. b) x^2 y $\frac{5}{3}$. d) ab y $-\frac{3}{5}$.

4. a) –3 y ab. b) –1 y x^3. c) $\frac{2}{5}$ y a^2b. d) 7 y x^2. **5**. 2, 3, 3 y 2, respectivamente.

6. Son semejantes: a) y c). **7**.a) $10a$. b) $-a$. d) $2x^2$. f) $\frac{19}{9}x$.

8. a) $4a+3$. b) $-3a^2$. c) $2x+2$.

9. a) $21a^3$. b) $15a^2$. c) $6a^6$. d) $6x^2$. e) $6x-8x^2$. f) $10a^2b^3$

10. a) $6a$. b) $\frac{2x}{3}$. c) $\frac{2xy}{3}$. d) $\frac{-4}{5a}$. e) $3x^2$. f) $\frac{7x}{y}$.

11. a) $A=ba$. b) $P=2a+2b$. c) $A=\pi r^2$. **12**. a) 84 cm^2. b) 38 cm. c) 78,5 cm^2.

Tema 9. (II) Ecuaciones — Resumen

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple sólo para algunos valores de las letras.

En las ecuaciones las letras se llaman incógnitas. La incógnita preferida suele ser la letra *x*.

Ejemplos: Son ecuaciones las expresiones algebraicas siguientes:

a) $2x = 18$ b) $x^2 = 4$ c) $2x - 3 = x + 7$ d) $\frac{x-2}{5} = 1$

La ecuación $2x = 18$ se cumple si $x = 9$, pues $2 \cdot 9 = 18$. Ese valor es su solución.

La ecuación $x^2 = 4$ se cumple si $x = 2$ o si $x = -2$, pues $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$. Esa igualdad no la cumple ningún otro valor. La ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones, que son $x = 2$ y $x = -2$.

- Cuando una igualdad se cumple para todos los valores de las letras se llama identidad.

Ejemplo:

$\frac{4x-2}{2} = 2x - 1$ es una identidad. Puedes comprobarlo (hazlo) cuando $x = 2, 5, 9, \ldots$, y para cualquier valor que tú decidas.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos:

Los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes:

a) $2x = 18$ y $4x = 36$ b) $2x - 3 = x + 7$ y $2x = x + 10$ c) $\frac{x-2}{5} = 1$ y $x - 2 = 5$

Puedes comprobar que la solución de las dos primeras es $x = 9$; que la solución de las dos segundas es $x = 10$; y que la solución de las dos últimas es $x = 7$. (Compruébalo.)

¿Qué es resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones. Esto es, los valores que cumplen la igualdad dada.

- Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que encontrar su solución sea fácil.
- Las transformaciones que pueden hacerse en una ecuación son dos:
  1. Sumar el mismo número (la misma cosa) a los dos miembros de la igualdad.
  2. Multiplicar (o dividir) por un mismo número los dos miembros de la igualdad.

Ejemplos:

a) La ecuación $2x - 3 = x + 7$ puede trasformarse como sigue:

→ Se suma 3 a cada miembro → $2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow 2x - 3 + 3 = x + 7 + 3 \Rightarrow 2x = x + 10$.

→ Se resta x a cada miembro → $2x - x = x + 10 - x \Leftrightarrow x = 10$.

Así se consigue despejar la *x*; esto es, determinar su solución. En este caso, $x = 10$.

b) La ecuación $\frac{x-2}{5} = 1$ se transforma así:

→ Se multiplica por 5 cada miembro $\Rightarrow \frac{x-2}{5} \cdot 5 = 1 \cdot 5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$.

→ Se suma 2 a cada miembro → $x - 2 + 2 = 5 + 2 \rightarrow x = 7$.

La solución de la ecuación es $x = 7$.

Resolución de ecuaciones fáciles

1. Ecuación $x+a=b$. Se resuelve restando *a* a ambos miembros. Queda: $x=b-a$.

Ejemplos: a) $x+5=8 \rightarrow$ restando 5 se tiene: $x=8-5 \Rightarrow x=3$.

b) $x+2=-3 \rightarrow$ restando 2 se tiene: $x=-3-2 \Rightarrow x=-5$.

2. Ecuación $x-a=b$. Se resuelve sumando *a* a ambos miembros. Queda: $x=b+a$.

Ejemplos: a) $x-3=6 \rightarrow$ sumando 3 se tiene: $x=6+3=9$. La solución es $x=9$.

b) $x-4=0 \rightarrow$ sumando 4 se tiene: $x=0+4=4$. La solución es $x=4$.

Observa:

Lo que está restando en un miembro, pasa sumando al otro miembro: $x+a=b \Rightarrow x=b-a$.

Lo que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro: $x-a=b \Rightarrow x=b+a$.

3. Ecuación $ax=b$. Se resuelve dividiendo por *a* ambos miembros. Queda: $x=\frac{b}{a}$.

Ejemplos: a) $3x=15 \rightarrow$ dividiendo por 3 se tiene: $x=\frac{15}{3}=5$. La solución es $x=5$.

b) $2x=-3 \rightarrow$ dividiendo por 2 se tiene: $x=\frac{-3}{2}=-1{,}5$. La solución es $x=-1{,}5$.

4. Ecuación $\frac{x}{a}=b$. Se resuelve multiplicando por *a* ambos miembros. Queda: $x=ab$.

Ejemplos: a) $\frac{x}{3}=2 \rightarrow$ multiplicando por 3 se tiene: $x=2\cdot 3=6$. La solución es $x=6$.

b) $\frac{x}{5}=-1 \rightarrow$ multiplicando por 5 se tiene: $x=-1\cdot 5=-5$. La solución es $x=-5$.

Observa:

Lo que está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro miembro; y lo que está dividiendo, pasa multiplicando. Esto es: $ax=b \Rightarrow x=\frac{b}{a}$; $\frac{x}{a}=b \Rightarrow x=ab$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: caso general

Se pueden resolver aplicando los pasos siguientes:

1. Si hay paréntesis, se resuelven. Hay que tener en cuenta las reglas de los signos.
2. Si hay denominadores, se quitan. Para quitarlos hay que multiplicar todos los términos por un múltiplo de los denominadores (en particular por su m.c.m.).
3. Se pasan (trasponen) las *x* a un miembro y los números al otro miembro: lo que está sumando, pasa restando; lo que está restando, pasa sumando. Se agrupan: se suman o restan.
4. Se despeja la *x*: lo que multiplica a la *x* pasa dividiendo al otro miembro; lo que divide a la *x*, pasa multiplicando al otro miembro.

Ejemplos:

a) $3x-5+2x=4-6x+7+x \Rightarrow 3x+2x+6x-x=4+7+5 \Rightarrow 10x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{10}=1{,}6$.

b) $3-4x-(2x-5)=14-9x \Rightarrow 3-4x-2x+5=14-9x \Rightarrow -4x-2x+9x=14-3-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$.

Tema 9. (II) Ecuaciones — Ejercicios

1. Comprueba cuál es la solución de las ecuaciones que siguen, entre los valores que se dan.

a) $2x-8=x+3 \rightarrow$ elige entre: $x = 9$; $x = 2$; $x = 11$.

$\rightarrow x =$ **9** no es solución, pues $2 \cdot$ **9** $- 8 = 10$ y **9** $+ 3 = 12$; $x =$ **2**, tampoco: $2 \cdot$ **2** $- 8 \neq$ **2** $+ 3$; $x =$ **11** sí es solución, pues $2 \cdot$ **11** $- 8 = 14$ y **11** $+ 3 = 14$: los resultados son iguales.

b) $\frac{x-2}{5}=1 \rightarrow$ elige entre: $x = 7$; $x = -3$; $x = 2$.

c) $x^2-5x+4=0 \rightarrow$ elige entre: $x = 0$; $x = 4$; $x = 1$; $x = 2$.

2. Halla pensando, sin despejar la x (pero justificándolo), la solución de las ecuaciones:

a) $2x=10 \rightarrow$

b) $3x+1=16 \rightarrow$

c) $2(x-5)=0 \rightarrow$

d) $\frac{32x+3}{7}=5 \rightarrow$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x+2=9 \Rightarrow x = 9 - 2 = 7$.

b) $x-3=2 \Rightarrow$

c) $x+6=2 \Rightarrow$

d) $x+5=-3 \Rightarrow$

e) $x+2=0 \Rightarrow$

f) $x-5=0 \Rightarrow$

g) $x-3=-1 \Rightarrow x=-1+3 \Rightarrow x=2$.

h) $x+4=4 \Rightarrow$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x=8 \Rightarrow$

b) $3x=-2 \Rightarrow$

c) $-4x=-12 \Rightarrow x=\frac{-12}{-4} \Rightarrow x=3$.

d) $5x=0 \Rightarrow$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+3=8 \Rightarrow$

b) $3x-5=-2 \Rightarrow$

c) $2-4x=3 \Rightarrow$

d) $5x-6=-6+x \Rightarrow$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x-5+2x+3=x \Rightarrow$

b) $3(x-5)=6 \Rightarrow$

c) $2-4x=3x+9 \Rightarrow$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x-(5+2x)+5=x \Rightarrow$

b) $3(x-5)=6-2(x-3) \Rightarrow$

c) $2x-4(x-1)=-3x+9 \Rightarrow$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2}=5 \Rightarrow$

b) $\frac{x}{4}=-1 \Rightarrow$

c) $\frac{x}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow$

d) $\frac{x}{3}=0 \Rightarrow$

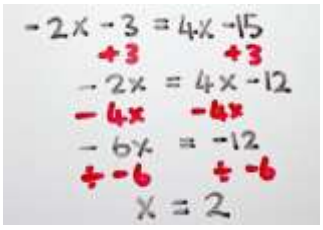
9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{2}+2=5 \Rightarrow$

b) $\frac{x}{4}=-1+x \Rightarrow$

c) $\frac{x}{2}-4=0 \Rightarrow$

d) $\frac{2x}{3}=-6 \Rightarrow$



10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x-6}{2}=2x+3 \Rightarrow$

b) $\frac{3x}{2}-2x+2=5 \Rightarrow$

c) $\frac{x}{4}+3=2-(1+x) \Rightarrow$

Soluciones.

1. a) $x = 11$. b) $x = 7$. c) $x = 4$ y $x = 1$. **2.** a) 5.b) 5. c) 5. d) 1. **3**. a) 7. b) 5. c) –4. d) –8. e) –2. f) 5. g) 2. h) 0.
4. a) 4.b) –2/3. c) 3. d) 0. **5**. a) 5/2. b) 1.c) –1/4. d) 0. **6**. a) 1/2. b) 7. c) 5. **7**. a) 0. b) –3/5. c) 5.
8. a) 10. b) –4. c) 5. d) 0. **9**. a) 2. b) 4/3. c) 8. d) –9. **10**. a) 12. b) –6. c) 16/5.

Tema 9. (II) Problemas de ecuaciones

Llámale *x*

La *x* es la letra más famosa entre los números.
La letra *x* suele emplearse para sustituir a un número del que no se sabe su valor.
La letra *x* puede designar la edad de una persona;
La letra *x* puede ser la longitud de la base de un triángulo;
La letra *x* puede indicar la distancia entre dos puntos;
La letra *x* puede designar la capacidad de un depósito, el precio de un determinado producto…

En la resolución de problemas, siempre que no sepas cuánto vale una cosa, llámale *x*.
(También puedes designar esa cosa con otra letra; y es normal que así se haga. Por ejemplo para designar la base desconocida de un triángulo se suele emplear la letra *b*; para indicar una velocidad desconocida se emplea la letra *v*; para el tiempo, se suele utilizar la letra *t*…)

Con relación a las operaciones, la letra *x* se maneja exactamente igual que un número. Así, por ejemplo:
El doble de *x* es 2*x*, que significa $2 \cdot x$. Por tanto, si *x* valiese 8, 2*x* valdría 16.

La mitad de *x* es $x:2=\frac{x}{2}$ → Si *x* valiese 100, $\frac{x}{2}$ valdría 50.

El cuadrado de *x* es x^2, que significa $x \cdot x \rightarrow$ si *x* valiese 7, $x^2 = 7 \cdot 7 = 49$.

La suma $2x+5x$ es igual a $7x$. Igualmente: $\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}x=\frac{8}{3}x$.

Por lo mismo: $x-\frac{x}{3}=\frac{x}{1}-\frac{x}{3}=\frac{3x}{3}-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$.

En consecuencia, no tengas miedo a la *x*; trátala como tratarías a cualquier número, pero trátala bien. Fíjate cómo puede tratarse en los siguientes problemas.

Problema 1

La suma de dos números consecutivos vale 149. ¿De qué números se trata?

En el problema no se sabe el valor de ninguno de los dos números. Se sabe que son consecutivos, lo que significa que si se conoce el primero, el segundo se obtiene sumándole 1.
¿Sabes el primero de los números? No. Pues llámale *x* → entonces, el segundo será *x* + 1.
Como su suma es 149, se tendrá que $x+(x+1)=149$.

Luego, $2x+1=149 \Rightarrow 2x=149-1 \Rightarrow 2x=148 \Rightarrow x=\frac{148}{2}=74$.

Los números son 74 y 75.

Problema 2

La edad de Pedro es la cuarta parte de la su padre. Si la suma de sus edades es 50, ¿cuántos años tiene cada uno?

¿Sabes la edad del padre de Pedro? No. Pues, llámale *x* → entonces, Pedro tendrá $\frac{x}{4}$, la cuarta parte → Como la suma de sus edades es 50:

$x+\frac{x}{4}=50 \Rightarrow$ (Multiplicando por 4) $\Rightarrow 4x+x=4 \cdot 50 \Rightarrow 5x=200 \Rightarrow x=\frac{200}{5}=40$.

Luego, la edad del padre es 40 años; y la de Pedro, 10.

Tema 9. (II) Problemas de ecuaciones

1. Escribe la expresión algebraica asociada al enunciado: "un número más su mitad vale 30". ¿De qué número se trata?

2. Si a un número se le resta su tercera parte el resultado es 40. ¿Cuál es ese número?

$\rightarrow$ Sea x = número buscado; su tercera parte será $\frac{x}{3}$. Debe cumplirse que $x - \frac{x}{3} = 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots$

3. La suma de tres números consecutivos vale 129. ¿De qué números se trata?

4. En una clase hay 27 alumnos. Si hay 3 chicos menos chicas, plantea una ecuación para saber cuántos chicos y chicas hay. Resuélvela.

5. Luís es 7 años mayor que su hermano Antonio. Si dentro de dos años la edad de Luís será el doble de la Antonio, ¿cuántos años tiene Antonio ahora?

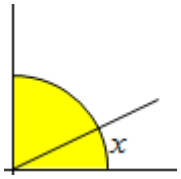
6. José María dobla los años a Cristina; Carmen es tres años mayor que Cristina; y José María, cuatro más que Catalina. Si la suma de todas las edades es 29, ¿cuál es la edad de cada uno?

7. Los lados iguales de un triángulo isósceles son tres veces más largos que su base. Si el perímetro del triángulo es 140 cm, ¿cuánto miden sus lados?

8. La base de un rectángulo es doble que la altura. Si el perímetro mide 90 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

9. Los lados iguales de un triángulo isósceles son dos veces más largos que su base. Si el perímetro del triángulo es 75 cm, ¿cuánto mide la base?

10. Un ángulo mide tres grados más que el doble de su complementario. ¿Cuánto mide cada ángulo? (Dos ángulos son complementarios si entre ellos suman 90º).



11. Una persona a la que han preguntado cuanto pesa, responde así: "La mitad de la cuarta parte de mi peso es 10 kg". ¿Cuánto pesa esa persona?

12. Un sexto de los $\frac{2}{3}$ de la estatura de Alicia es igual a 17 cm. ¿Cuál es la estatura de Alicia?

13. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro pueden llenarse con una garrafa de 24 litros?

14. Andrés ha regalado la quinta parte de sus cromos a Lucas y la tercera parte a Juan. Si aún le quedan 42, ¿cuántos cromos tenía Andrés?

15. Felipe tiene ordenados en su estantería la quinta parte de sus libros. Si todavía le quedan por ordenar 64 libros, ¿cuántos libros lleva ordenados?

16. Cristina ha andado la tercera parte de un camino. Si aún le quedan 9 km, ¿cuánto mide el camino?

Soluciones: **1.** $x+\frac{x}{2}=30$. 20. **2**. 60. **3**. 42, 43, 44. **4.** $x+x+3=27$. $x=12$. **5**. 5 años.
6. 10, 5, 8 y 6. **7**. 20, 60 y 60. **8**. 30 por 15 cm. **9**. 15 cm. **10**. 61º y 29º.
11. 80 kg. **12**. 153 cm. **13**. 32. **14**. 90. **15**. 80. **16**. 13,5 km.

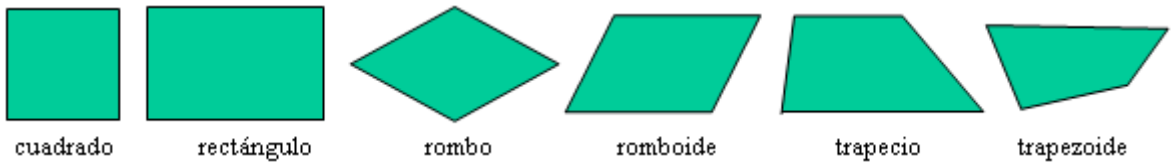
Tema 10. Cuadriláteros — Resumen

- Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados.

Un cuadrilátero se puede partir en dos triángulos. Por tanto, la suma de los ángulos de un cuadrilátero vale 360º.

- Las diagonales de un cuadrilátero son los segmentos que unen vértices opuestos. Un cuadrilátero tiene dos diagonales.

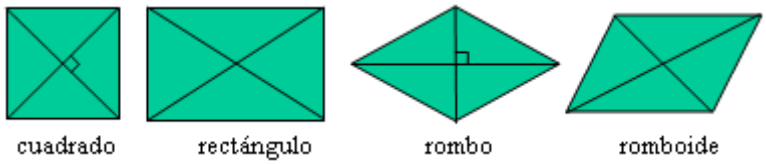
Clasificación e los cuadriláteros



- Cuadrado → Tiene los cuatro lados iguales. Cada uno de sus ángulos mide 90º.
- Rectángulo → Tiene los lados paralelos dos a dos. Cada uno de sus ángulos mide 90º.
- Rombo → Tiene los cuatro lados iguales y paralelos dos a dos. Sus ángulos opuestos son iguales.
- Romboide → Tiene los lados paralelos dos a dos. Sus ángulos opuestos son iguales.
- Trapecio → Tiene dos lados paralelos y de distinta longitud.
- Trapezoide → No tiene paralelos ningún par de lados. La mayoría de los cuadriláteros son trapezoides.

Paralelogramos. Son los cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos.
Son el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide.

- Las diagonales de cualquier paralelogramo se cortan en su punto medio. Además, las diagonales del cuadrado y del rombo se cortan formando un ángulo recto (de 90º).

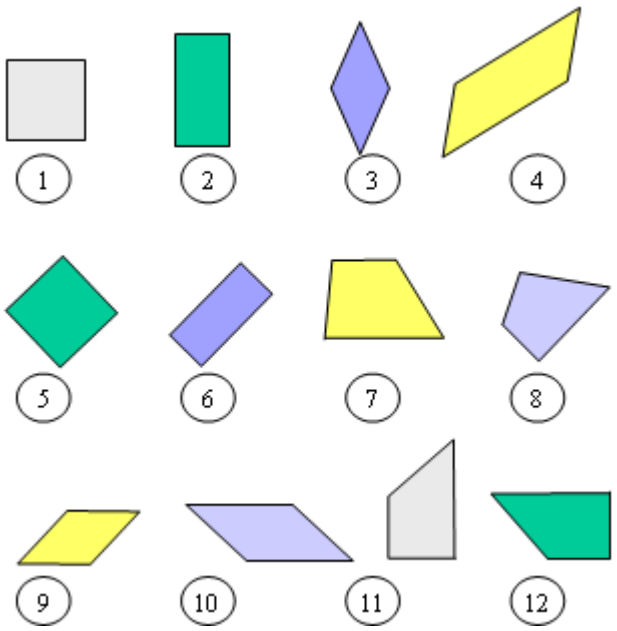


Clasificación de los trapecios

- Trapecio rectángulo → Es un trapecio que tiene dos ángulos rectos.
- Trapecio isósceles → Es un trapecio que tiene iguales los lados no paralelos. También tiene iguales, dos a dos, los ángulos determinados en los lados paralelos.

Tema 10. Cuadriláteros Ejercicios

1. Indica el nombre de cada uno de los siguientes cuadriláteros:



1.

2.

3.

4.

5. Cuadrado; y rombo. Sus lados son iguales y perpendiculares.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

2. Dibuja un cuadrado de lado 4 cm. Dibuja también un rectángulo de base 7 cm y de altura 3 cm.

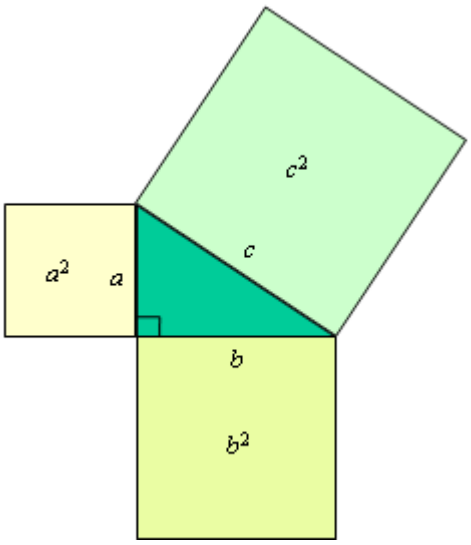
3. Dibuja dos rombos distintos de lado 3 cm. Traza sus diagonales en cada caso. ¿Dónde se cortan?

4. Dibuja un rombo sabiendo que sus diagonales miden 4 cm y 6 cm.

Tema 11. Teorema de Pitágoras — Resumen

El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos. Esa relación es:
"En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".
O lo que es lo mismo:
Si los catetos miden *a* y *b* y la hipotenusa *c*, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

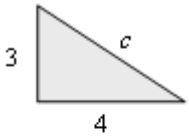


- El teorema de Pitágoras permite conocer un lado desconocido de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los otros dos, pues:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

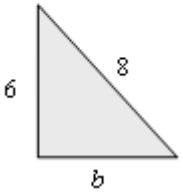
Ejemplos:
a) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa, *c*, cumple que:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5.$$



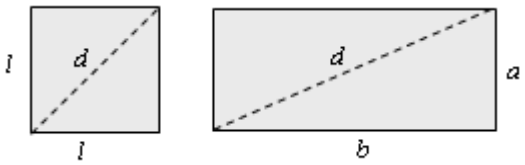
b) Si la hipotenusa vale *c* = 8 cm y un cateto vale *a* = 6 cm, el otro cateto, *b*, cumple:

$$(b^2 = c^2 - a^2) \Rightarrow b^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28} \approx 5{,}29.$$



<u>Algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras</u>
En muchas figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, triángulos…), el teorema de Pitágoras permite calcular diagonales, lados, alturas, apotemas… Para ello, en todos los casos, hay que construir el triángulo rectángulo apropiado.

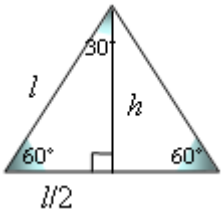
- En los <u>cuadrados</u> y en los <u>rectángulos</u> puede hallarse la <u>diagonal</u> cuando se conocen los lados.



En el cuadrado: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot l$.
También podría hallarse el lado conociendo la diagonal.
En el rectángulo: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
También podría hallarse un lado conociendo la diagonal y el otro lado.

Ejemplos:
a) Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, su diagonal es $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}48$.
b) Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su base mide 8 cm, entonces puede calcularse su altura, y vale: $a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = 6$ cm.

- En un <u>triángulo equilátero</u>, para cualquier vértice, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del lado (de la base). Por tanto, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



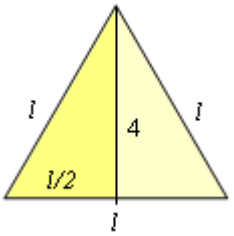
Esto es: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}\cdot l}{2}$.

Por lo mismo, conociendo la altura puede calcularse la medida del lado.

Ejemplos:

a) Si el lado de un triángulo equilátero mide 15 cm, su altura valdrá: $h = \frac{\sqrt{3}\cdot 15}{2} \approx 13$ cm.

b) Si la altura de un triángulo equilátero mide 4 cm, entonces:



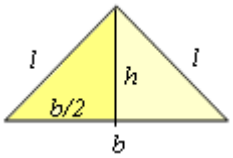
$$l^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 16 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow 4l^2 = 64 + l^2 \Rightarrow 3l^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4{,}61.$$

- En un <u>triángulo isósceles</u> la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del otro lado. Por tanto, conociendo los lados, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.

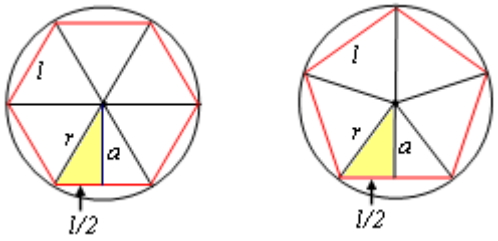
Ejemplo:

Si en el triángulo adjunto el lado $l = 5$ cm y la base $b = 8$ cm, se cumple:



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$

- En los <u>polígonos regulares</u> pueden establecerse relaciones pitagóricas entre el lado del polígono, su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.



Como puede observarse, se establece la relación: $r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$. Por tanto, conociendo dos de las tres medidas puede obtenerse la otra.

Tema 11. Teorema de Pitágoras — Ejercicios

(Para resolver los ejercicios de esta hoja puede utilizarse calculadora).

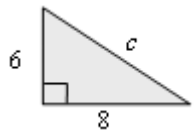
1. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cm. Comprueba, midiendo, que su hipotenusa mide 5 cm (aproximadamente). Escribe la relación pitagórica para las medidas de los lados de ese triángulo rectángulo.

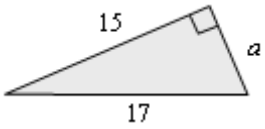
.....

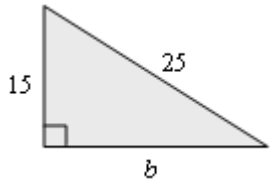
2. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 y 3. Comprueba que su hipotenusa mide 3,6 cm (aproximadamente). Escribe la relación pitagórica para las medidas de los lados de ese triángulo rectángulo.

.....

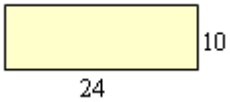
3. Halla el lado desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

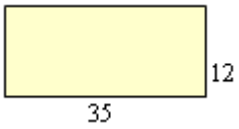


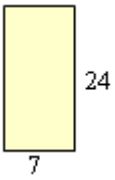




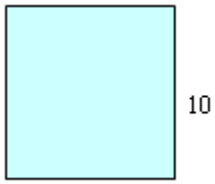
4. Halla la diagonal de los siguientes rectángulos.

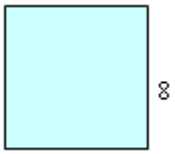


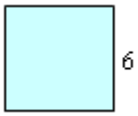




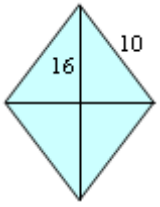
5. Halla la diagonal de los siguientes cuadrados.





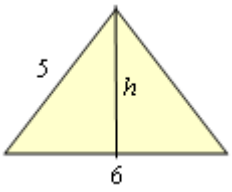


6. El lado de un rombo mide 10 cm y su diagonal mayor 16 cm. ¿Cuánto vale su diagonal menor?

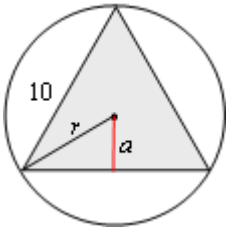


7. Las diagonales de un rombo miden 8 y 6 cm. Halla su lado. (Haz un dibujo).

8. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 5 cm. Si su base mide 6 cm, ¿cuánto medirá su altura?



9. En la figura adjunta se muestra un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia. Si el lado del triángulo mide 10 cm, halla la altura del triángulo, su apotema y el radio de la circunferencia.
Nota: La apotema de un triángulo equilátero es la tercera parte de su altura. Toma $\sqrt{75} = 8{,}7$ y $\sqrt{33{,}41} = 5{,}78$.



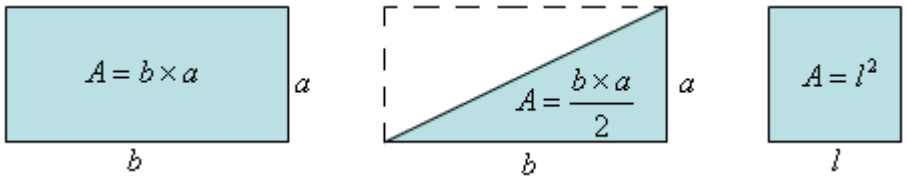
Soluciones:

3. $c = 10$; $a = 8$; $b = 20$. **4**. 26; 37; 25. **5**. Aproximadamente: 14,14; 11,31; 8,49.
6. 12 cm. **7**. 5 cm. **8**. 4 cm. **9**. $h = 8{,}7$ cm; $a = 2{,}9$ cm; $r = 5{,}78$ cm.

Tema 12. Áreas y perímetros Resumen

Áreas de cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos

El área de un rectángulo se calcula multiplicando la longitud de su base por la de su altura.
El área de un triángulo rectángulo es la mitad que la de un rectángulo. Se calcula así:
El área de un cuadrado se halla multiplicando lado por lado: el lado al cuadrado.

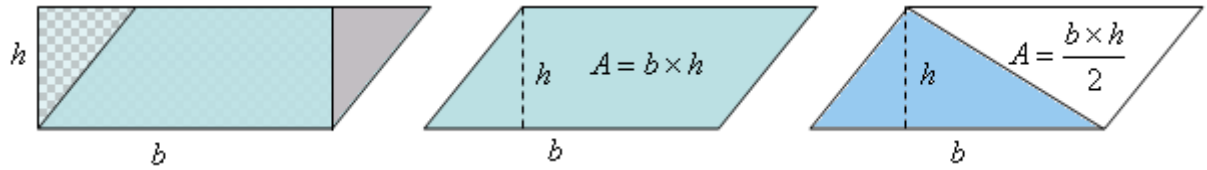


- El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

Para un rectángulo: $P = 2a + 2b$. Para un cuadrado: $P = 4l$.

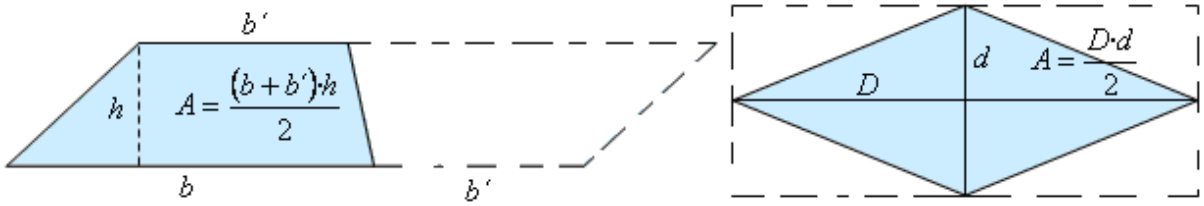
Área de un paralelogramo cualquiera y de un triángulo cualquiera

El área de un paralelogramo cualquiera se calcula multiplicando la longitud de su base por la longitud de su altura. (Como puedes observar, a partir del rectángulo de base *b* y altura *h*, cuya área vale $b \times h$, se obtiene un paralelogramo trasladando el triángulo de la izquierda a la derecha; que tendrá la misma área).
El área de un triángulo cualquiera es la mitad que la de un paralelogramo.



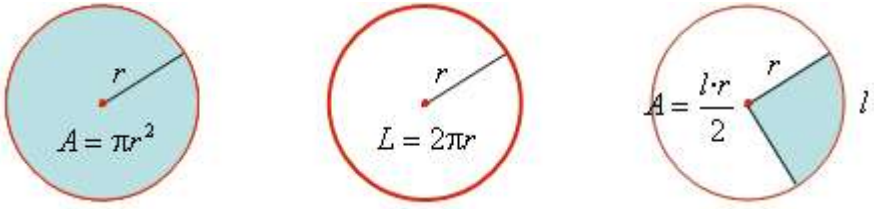
Áreas de un trapecio y de un rombo

El área de un trapecio se calcula multiplicando la suma de las longitudes de las bases por la longitud de su altura y dividiendo entre 2.
(Puedes observar que un trapecio es la mitad de un paralelogramo de base $b + b'$ y altura *h*).
El área de un rombo se calcula multiplicando las longitudes de las bases y dividendo entre 2.
(Puedes observar que un rombo es la mitad de un rectángulo de base *D y* altura *d*).



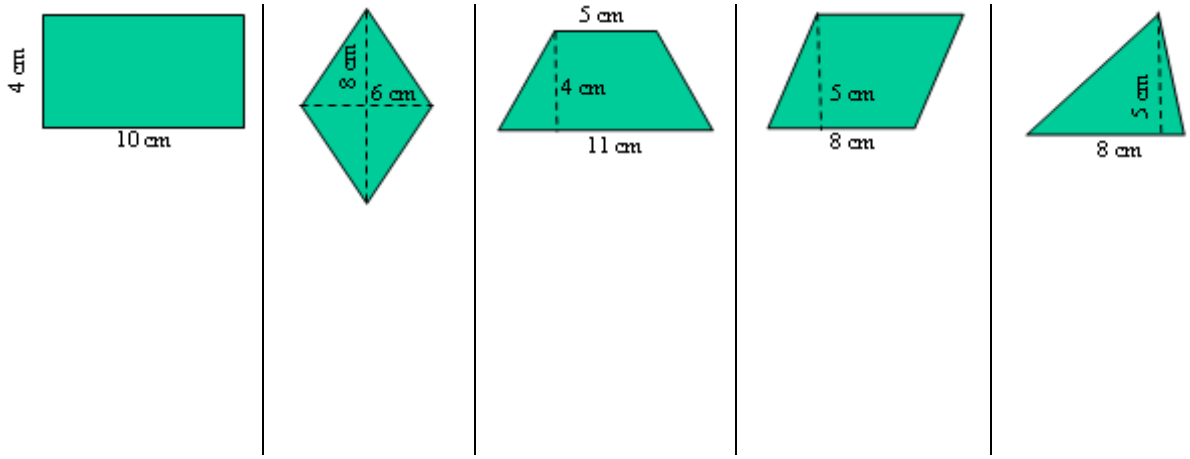
Círculo, circunferencia y sector circular

El área de un círculo se calcula multiplicando el número π por el cuadrado del radio.
La longitud de una circunferencia es el doble del producto del número π por el radio.
El área de un sector circular se calcula multiplicando la longitud del arco por el radio y dividiendo entre 2.



Tema 12. Áreas y perímetros Ejercicios

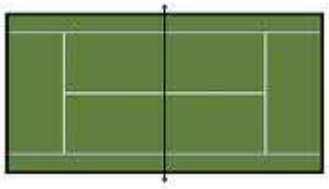
1. Halla el área de cada uno de los siguientes polígonos:



2. Halla el perímetro del rectángulo, del rombo y del trapecio isósceles del ejercicio anterior. (Observación: Quizá debes utilizar el teorema de Pitágoras).

3. Las dimensiones del estadio Santiago Bernabeu son 107 por 72 metros. ¿Cuál es su área? ¿Y su perímetro?

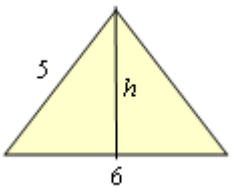
4. Una pista de tenis tiene 23,77 metros de largo. El ancho varía según se juegue individuales (8,23 metros) o dobles (10,97 m). ¿Cuántos metros cuadrados tiene más la pista de dobles que la de individuales?



5. Halla el área de un triángulo equilátero de lado 12 cm. (Haz un dibujo).

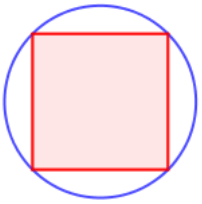
6. El lanzamiento de disco es una prueba de atletismo, donde el objetivo es lanzar un objeto pesado de sección circular denominado disco lo más lejos posible. El disco se lanza desde un círculo de 2,50 m de diámetro y debe aterrizar dentro de un sector de ángulo de unos 35º. ¿Cuál es la superficie del círculo de lanzamiento? Si ese círculo está limitado por un aro metálico, ¿cuál es la longitud de dicho aro?

7. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 5 cm. Si su base mide 6 cm, ¿cuánto medirá su altura? Halla su área y su perímetro.



8. En la figura adjunta se muestran un cuadrado inscrito en una circunferencia. Si el diámetro de la circunferencia mide 20 cm, halla el lado del cuadrado. Calcula también la superficie del cuadrado y la del círculo; y la longitud de la circunferencia.

Dato: Toma $\sqrt{200} = 14{,}14$.



Soluciones:

1. 40, 24, 32, 40, 20 cm^2, respectivamente. **2**. 28, 20, 26 cm, respectivamente.
3. 7704 m^2; 358 m. **4**. 65,1298 m^2. **5**. 31,2 cm^2.
6. 4,906 cm^2; 7,85 cm. **7**. 4 cm. 12 cm^2; 16 cm.
8. r = 10 cm; A = 200 cm^2; A_{Cir} = 314 cm^2. L = 62,8 cm.