TRABAJO PARA EL ALUMNADO PENDIENTE

MATEMÁTICAS II

I. ÁLGEBRA.-

1.- Sean A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = A$ e I la matriz identidad de orden n. ¿Qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

2.- Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - B + C = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3.- Pruebe, sin desarrollar, que $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

4.- Analice, en función del valor de m, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.- Para $m = 2$, ¿tiene la matriz A del ejercicio anterior inversa?. En caso afirmativo, calcúlela.

6.- Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + 3C = C \cdot (B + 3I)$, siendo: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.- Resuelva el sistema matricial $\left\{ \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$

8.- Demuestre, sin desarrollar, que $\begin{vmatrix} yz & x & \frac{3}{x} \\ xz & y & \frac{3}{y} \\ xy & z & \frac{3}{z} \end{vmatrix} = 0$.

9.- Analice, en función del valor de m, el rango de $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & m & 3\\ 5 & -1 & m\end{pmatrix}$.

10.- Si r(A) es el rango de la matriz A, indique, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

A) r(A+B) = r(A) + r(B). B) r(-A) = - r(A).

11.- Analice, en función del valor de m, el rango de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -m\\ m & -1 & 1 & m\\ 1 & 1 & 1 & m\end{pmatrix}$.

12.- A) Estudie, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} mx+y+z=m\\ x+y+mz=m\\ x+y+z=m\end{array}\right\}$.

B) Resuélvalo, si es posible, para $m=1$.

13.- A) ¿Es el rango de una matriz igual al rango de su opuesta?. Justifique su respuesta.

B) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}$, calcule a y b para que $A^2=A$.

14.- Demuestre, sin aplicar la Regla de Sarrus, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z-y)$$

15.- A) Estudie, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} x+my+z=m+2\\ x+y+mz=-2(m+1)\\ mx+y+z=m\end{array}\right\}$.

B) Resuélvalo, si es posible, en los casos $m=-1$ y $m=-2$.

16.- A) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, construya la matriz $Y=3A^tA-2I$ y resuelva la ecuación $AX=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

B) Si todos los elementos de una matriz cuadrada de orden n se multiplican por –1, ¿cómo queda afectado el valor de su determinante?

17.- A) Discuta, para los distintos valores del parámetro, el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{cases} 2x+y=m \\ -2x+y=-1 \\ x-my=-2 \end{cases}\right\}$.

B) Resuélvalo en los casos en que sea compatible.

18.- Discuta y resuelva, en función de los posibles valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ -2x-4z=0 \\ x-y+z=m \end{cases}\right\}$.

19.- **a)** Estudie, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{cases} mx+my=m \\ x-y+mz=m \\ x+2y+3z=m \end{cases}\right\}$.

b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado.

20.- Estudie el sistema $\left.\begin{cases} x+my-z=m \\ 2mx-y+mz=1 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}\right\}$ y resuélvalo para $m=1$.

21.- Estudie **el** sistema $\left.\begin{cases} x+y+5z=0 \\ 2x-my=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}\right\}$ y resuélvalo cuando sea posible.

22.- Discuta, para los distintos valores del parámetro, y resuelva en los casos de compatibilidad el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{cases} 3x+2y+mz=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ mx+y-z=0 \end{cases}\right\}.$$

23.- Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{cases} -x-y+3z=0 \\ 2x+az=0 \\ 2y+4z=0 \end{cases}\right\}$ se pide:

a) Valores de a para que el sistema tenga únicamente la solución trivial.

b) Valores de a para que el sistema sea compatible indeterminado y resolverlo.

24.- Discuta y resuelva, para los distintos valores del parámetro, el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} mx+y=0 \\ -y+2mz=0 \\ -x+my=0 \end{array}\right\}$.

25.- A) Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} x-my=2 \\ mx-y=m+1 \end{array}\right\}$.

B) Resuélvalo en el caso que sea compatible indeterminado.

II. GEOMETRÍA.-

1.- A) Estudie la dependencia lineal, según el valor de x, de los vectores (x,2,0), (x,3x,5) y (1,x,5).

B) Determine el valor de b para que el vector (1,b,-6) sea combinación lineal de los vectores (1,1,0) y (2,2,-3).

2.- Calcule el valor de x para que los puntos (x,0,1), (0,1,2), (1,2,3) y (7,2,1) estén en un mismo plano. Calcule la ecuación del plano.

3.- Sean los vectores a=(-1,2,3), b=(2,5,-2), c=(4,1,3) y d=(4,1,-8).

a) ¿Se puede expresar c como combinación lineal de a y b?
b) ¿Se puede expresar d como combinación lineal de a y b?
c) ¿Son a, b y d vectores linealmente dependientes?

4.- Considere las rectas r: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3+a}{a}$ y $s:\left\{\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\}$.

a) Demuestre que, independientemente del valor de “a”, las rectas se cortan.

b) Determine el valor del parámetro “a” para que r y s sean perpendiculares.

5.- Considere las rectas r: $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{4}$ y $s:\left\{\begin{array}{l} 2x-z=2 \\ y=-1 \end{array}\right\}$.

a) Determine la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.
b) Calcule la distancia entre r y s.

6.- Dados los planos $3x+4y+5z=0$, $2x+y+z=0$ y el punto A(-1,2,1), halle el plano que pasa por A y por la recta intersección de los dos planos.

7.- Dados el plano $ax+2y-4z=b$ y la recta $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=z+3$, determine los valores de a y b para que la recta esté contenida en el plano.

8.- A) Demuestre que los puntos A(2,3,0), B(0,0,1), C(0,1,0) y D(1,2,1) no están en un mismo plano.

B) Calcule la distancia del punto A al plano determinado por los puntos B, C y D.

9.- A) Calcule el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de $2x+y+3z-6=0$ con los ejes de coordenadas.

B) Determine la ecuación de la recta que está contenida en el plano $x-2y+3z=5$, pasa por el punto (0,2,3) y es perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$.

10.- Dada la recta r determinada por el punto P(1,2,-3) y el vector de dirección (1,-1,2), calcule el punto de r más cercano al punto Q(1,0,2).

11.- Dados los planos $x-y+z=0$, $x+y-z=2$ se pide:

a) La recta que pasa por A(1,2,3) y no corta a ninguno de ellos.

b) Un punto de la recta $s:\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=z \end{matrix}\right\}$ que equidiste de A(1,2,3) y B(1,1,2).

12.- a) Halle el plano que contiene a la recta $\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+\lambda \end{matrix}\right\}$ y pasa por el punto (2,1,3).

b) Encuentre la distancia del punto P(1,-1,2) al plano anterior.

13.- A) Dados los vectores (1,2,-1) y (2,1,0), añada un tercer vector para que el conjunto formado por los tres vectores sea linealmente independiente (linealmente dependiente).

B) ¿ Es (1,2) combinación lineal de los vectores (-1,1) y (2,1)?

C) Determine el valor de b para que sean dependientes (independientes) los vectores (2,5b,3b), (1,-1,1) y (1,2,-1).

14.- Dados los vectores (9,3,-3) y (1,2,3) se pide:

A) Sus módulos.

B) Su producto vectorial.

C) Su vector unitario.

D) El área del paralelogramo que los tiene por lados.

15.- A) Halle el plano que pasa por (-1,-2,4) y contiene a $r:\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-2t \\ z=3-4t \end{cases}$.

B) Calcule el valor de m para que los puntos A(2,0,1), B(-2,3,1), C(1,-3,2) y D(3,m,2) sean coplanarios.

16.- Estudie si el triángulo de vértices (1,2,1), (0,3,1) y (1,0,-1) es equilátero, isósceles o escaleno. Calcule su área.

17.- Estudie la posición relativa de los planos ax + 20y + 7z = 1, 3y + z = 0, x – ay = 1.

18.- Se sabe que la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+b}{-10}=\frac{z}{1}$ corta perpendicularmente al plano $2x+ay+z=2$ y que la recta pasa por el punto (-1,1,-1). Calcule a, b y el punto de corte.

19.- El vértice A de un triángulo rectángulo está en la recta $r:\begin{cases} x=3 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ y su hipotenusa tiene los vértices en los puntos B(2,1,-1) y C(0,-1,3). Halle el punto A y el área del triángulo ABC.

20.- Halle el punto simétrico del punto A(-1,3,3) respecto al plano de ecuación $x+y-2z=5$.

21.- Halle un vector (x,y,z) sabiendo que:
a) La suma de sus componentes es 3.
b) El vector (x,y,z) es combinación lineal de (2,2,2) y (-1,1,0).
c) Los vectores (1,0,1), (0,1,0) y (x,y,z) son linealmente dependientes.

22.- Calcule el valor de k para que los vectores (4,k,1) y (2,2,-1) formen un ángulo de 45º.

23.- Determine la ecuación de la recta que está contenida en el plano $x-2y+3z=5$, pasa por el punto (0,2,3) y es perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$.

24.- Analice, según los valores de k, la posición relativa de los planos $kx-y-z=k, x-ky+kz=-k, x+y+z=1$.

25.- Dados los planos $3x+4y+5z=0$, $2x+y+z=0$ y el punto A(-1,2,1), halle el plano que pasa por A y por la recta intersección de los dos planos.

26.- Halle las ecuaciones de la recta simétrica de la recta $r: x=y=z$ respecto del plano $x-2y+z-1=0$.

27.- Estudie en función del parámetro a la posición relativa de las rectas $r:\left\{\begin{array}{l} x=1+a\lambda \\ y=-1-a\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\}$ y $s:\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 3x-y+az=5 \end{array}\right\}$.

28.- Encuentre la distancia del punto P(0,6,1) al plano determinado por el punto A(0,1,3) y la recta L que pasa por los puntos B(1,0,1) y C(0,0,2).

29.- A) Estudie si la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ z=1 \end{array}\right\}$ y el plano de ecuación $x+y+z=4$ son o no paralelos.

B) Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta anterior y es perpendicular al plano dado.

30.- A) Encuentre la distancia del punto P(1,1,1) a la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=3+2t \end{array}\right\}$.

B) Compruebe si los puntos A(1,-1,3) y B(0,-2,1) pertenecen a la recta anterior y determine el área del triángulo PAB.

31.- A) Calcule el valor de a para que (1,1,0) y (a,1,-1) formen 60º.

B) Halle el área del triángulo de vértices A(3,1,-2),B(5,5,8) y C(1,-2,3).

C) Calcule un vector perpendicular a (5,1,3) y de módulo 2.

32.- Calcule el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de $2x+y+3z-6=0$ con los ejes de coordenadas.

33.- **A)** Analice, según los valores de k, la posición relativa de los planos $kx+y+kz=2, -x+2y-z=6, 3y+5z=4$.

B) Analice, según los valores de k, la posición relativa de las rectas $\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l} x=k+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=2k+\lambda \end{array}\right\}$

34.- Dados los planos $x-y+z=0$, $x+y-z=2$ se pide:

A) La recta que pasa por A(1,2,3) y no corta a ninguno de ellos.

B) Los puntos que equidisten de A(1,2,3) y B(2,1,0) y pertenezcan a la recta intersección de los planos dados.

35.- Halle, si existe, algún punto que pertenezca a la vez a los tres planos

$$\pi_1 : x-y+z=0,\ \pi_2 : z=2y,\ \pi_3 : \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda+\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{array}\right\}$$

36.- Calcule el volumen del tetraedro limitado por los planos $x+y+z=4, x-z=0, x+y=3, x=0$.

37.- Dado el tetraedro con un vértice O en el origen de coordenadas y los otros tres A, B y C sobre los semiejes positivos OX, OY y OZ, respectivamente, se pide:

A) Las coordenadas de A, B y C sabiendo que el volumen del tetraedro es 4/3 y las aristas OA, OB y OC tienen igual longitud.

B) La ecuación de la altura del tetraedro correspondiente a la cara ABC.

C) La distancia entre las rectas AB y OC.

D) El ángulo que forman las aristas BC y AB.

III. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.-

1.- Calcule los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+2}$ B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx^2}{1-\cos x}$ C) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{5x-6}-2}{x-2}\right)$

D) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+8}-\sqrt{x^2+x-1})$ E) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$.

2.- Determine el valor de los parámetros en la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si \quad x\le 0 \\ \ln(x+1)-1 & si \quad x>0 \end{cases}$ para que sea continua y derivable en todo $\Re$.

3.- Se sabe que la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si \quad x<-1 \\ x^2+3 & si \quad x\ge -1 \end{cases}$ es derivable en x = -1.Halle razonadamente los valores de a y b.

4.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^3+x^2 & si \quad x<1 \\ ax-b & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ determine razonadamente (haciendo uso de las definiciones) los valores de a y b para que:

a) Sea continua en x = 1.

b) Sea derivable en x = 1.

5.- Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & si \quad x\leq 2 \\ ax^2+b & si \quad x>2 \end{cases}$ en función de los parámetros a y b.

6.- Determine a y b de modo que la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 1 \\ -x^2+ax+b & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ sea continua y derivable para todo x real.

7.- Determine a y b de modo que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & si \quad x\leq 1 \\ ax+b & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ sea continua y derivable.

8.- Calcule el valor de los parámetros para que sea continua y derivable en el punto x = 1 la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si \quad x<1 \\ x^2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$.

9.- De la función $f(x)=\begin{Bmatrix} 0 & si & x\leq -1 \\ ax^3+bx & si & -1<x<2 \\ 11x-16 & si & x\geq 2 \end{Bmatrix}$ se pide:

a) Halle a y b para que sea continua en todo su dominio.

b) Estudie su derivabilidad.

10.- Estudie, según el valor de a y b, la continuidad y la derivabilidad en todo su dominio de la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & si \quad x<-1 \\ ax+b & si \quad -1\leq x\leq 1 \\ x^2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

11.- Estudie, según el valor del parámetro, la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si \quad x<0 \\ a & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

12.- Estudie la continuidad y la derivabilidad en todo su dominio de la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-1 \\ -x^2+2 & si \quad -1\le x<1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

13.- Estudie la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{Bmatrix} 2 & si & x<0 \\ x-2 & si & x\in[0,4] \\ x^2-8 & si & x>4 \end{Bmatrix}$

14.- Determine los valores de a y b para los que la función $f(x)=\begin{Bmatrix} 3x+2 & si & x<0 \\ x^2+2a\cos x & si & 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si & x\ge\pi \end{Bmatrix}$ es continua en toda la recta real.

15.- Determine los valores de a y b para que sea continua en todos los puntos la función f(x)= $\begin{cases} ax^2+b & si \quad x<0 \\ x-a & si \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

16.- Estudie la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ y clasifique sus diferentes tipos de discontinuidad.

17.- El precio en euros de x litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:

$$P(x)=\begin{cases} 3x & si \quad 0\le x\le 20 \\ \sqrt{ax^2+2000} & si \quad x>20 \end{cases}$$

a) Determine el valor de la constante a para que la función $P(x)$ sea continua.
b) Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿ a cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro ?.

18.- Estudie la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

A) $f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{x} & si & x<1 \\ \sqrt{x+1} & si & x\ge 1 \end{Bmatrix}$ B) $f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & si & x\neq\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{5}{3} & si & x=\dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$

19.- Demuestre que la ecuación $x=\cos x$ tiene una solución en el intervalo (0,1).

20.- Halle la ecuación de la tangente a la curva dada por $f(x)=3^{2x^2+1}$ en el punto de abcisa $x=0$.

21.- Determine los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$.

22.- Busque los puntos de la curva $y=x^4-7x^3+13x^2+x+1$ que tienen la tangente formando un ángulo de 45 º con el eje de abcisas.

23.- Dada la función $f(x)=\dfrac{mx^2-1}{x}$ y aplicando la definición de derivada, halle el valor de m para que $f'(1)=0$.

24.- ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abcisas?

25.- La gráfica de la función $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos A(2,3) y B(3,13), siendo su tangente en el punto de abcisa 1 paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Halle el valor de los coeficientes a,b y c.

26.- a) Dada $f(x)=\sqrt{x+1}$ halle, aplicando la definición de derivada, $f'(1)$.
b) ¿ Existen puntos donde la función es discontinua ?. En caso afirmativo, determínelos.

27.- a) Halle la ecuación de la tangente a la curva dada por $f(x)=3^{2x^2+1}$ en el punto de abcisa $x=0$.
b) Determine los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$.

28.- Derive y simplifique las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ b) $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$ c) $f(x)=e^{\sqrt{2x}}$

d) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ e) $f(x)=sen2x+\cos^2 x$ f) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

g) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ h) $f(x)=3^{\sqrt{2x^3}}$ i) $f(x)=(sen2x)^2+\cos^2 x$

j) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ k) $f(x)=\ln x^2+e^{x^2+3}$ l) $f(x)=(2x+3)^2$ m) $f(x)=sen5x^2$

n) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ o) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ p) $f(x)=5e^{2x+1}$

q) $f(x) = x^{10}\sqrt{x}$

29.- Utilizando la definición calcule la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto x=1 y encuentre la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el citado punto.

30.- Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \left|1 - x^2\right|$. Represéntela gráficamente.

31.- A) Dada $f(x) = \dfrac{3+x}{x-2}$ halle, aplicando la definición de derivada, $f'(3)$.

B) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $f(x) = \dfrac{3+x}{x-2}$ en el punto de abcisa $x = 3$.

32.- Derive y simplifique las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ y $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.

33.- Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 3x + 2$ que son paralelas a la recta $y = 9x$.

34.- Halle dos números de suma 20 y de producto máximo. Sol.: 10 y 10.

35.- Halle dos números de suma 18 y tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo. Sol.: 12 y 6.

36.- Halle las dimensiones de un campo rectangular de 3600 metros cuadrados de superficie para poderlo cercar mediante una valla de longitud mínima. Sol.: 60 y 60.

37.- Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Halle las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima. Sol.: $r = \sqrt[3]{\dfrac{80}{\pi}}\,dm.; h = \dfrac{40}{\sqrt[3]{100\pi}}\,dm.$

38.- De todos los triángulos isósceles de 12 cm. de perímetro halle las dimensiones de los lados del que tenga área máxima. Sol.: 4 cm.

39.- Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 12 cm. calcule las dimensiones del que tenga área máxima. Sol.: $\sqrt{288}cm.$

40.- Divida un segmento de 60 cm. en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas sea mínima. Sol.: 30 cm.

41.- Determine la distancia mínima del origen a la curva $xy = 1$. Sol.: $\sqrt{2}$.

42.- Entre todos los cilindros de volumen V halle el de menor superficie.

Sol.: $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}; h = \dfrac{V}{\sqrt[3]{\dfrac{V^2\pi}{4}}}$

43.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcule las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. Sol.: Base 5 cm y altura 10 cm.

44.- El coste de producción de x unidades diarias de un producto es $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y el precio de venta de una de ellas es $50 - \frac{x}{4}$ u.m. Halle el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo. Sol.: 15.

45.- Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. La superficie total a recubrir es de 192 metros cuadrados. Calcule las dimensiones de manera que su volumen sea máximo. Sol.: 8, 8 y 4 m.

46.- Determine las dimensiones de los lados y el área del rectángulo de área máxima que, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro, se puede inscribir en un semicírculo de 2 metros de radio.

47.- Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:

a) El perímetro de uno de ellos sea el triple del perímetro de otro.
b) Se necesitan 1248 metros de alambre para cercar los tres.
c) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

48.- Encuentre dos números positivos cuya suma sea 10 y tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

49.- Halle las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro, sabiendo que el volumen ha de ser de 9 metros cúbicos, su altura 1 metro y el coste de construcción por metro cuadrado es de 30 euros para la base, 35 euros para la tapa y 20 euros para cada pared lateral.

IV. INTEGRACIÓN.-

1.- Calcule las siguientes integrales indefinidas:

A) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ B) $\int (x-3)\cdot e^x dx$ C) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$

D) $\int \ln x^2 dx$ E) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ F) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

G) $\int (1-3x)3^x dx$ H) $\int x^2 \cdot senx dx$ I) $\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}dx$

J) $\int (x^2+1)\cdot e^{x^3+3x}dx$ K) $\int \frac{x^3-2x^2}{x^2-7x+12}dx$ L) $\int x^2\cdot e^x dx$

M) $\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}dx$ N) $\int x\cdot \ln x dx$ Ñ) $\int (x-1)\cdot e^{-2x}dx$

O) $\int \frac{senx}{\sqrt{\cos x}}dx$ P) $\int (x^2-1)e^{-2x}dx$ Q) $\int (x^2-1)\cdot e^{-x}dx$

R) $\int \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx$ S) $\int 3x\sqrt{1+x^2}dx$ T) $\int (x-1)\cdot \ln x dx$

U) $\int 3xe^{x^2}dx$ V) $\int x^2 \ln x dx$ W) $\int \sqrt{6x+1}dx$

X) $\int x arctg x dx$ Y) $\int (2x+3)\cdot e^{2x}dx$ Z) $\int xe^{3x^2}dx$

2.- Calcule las siguientes integrales indefinidas:

A) $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$ B) $\int \frac{2x^2+1}{x^3-3x+2}dx$ C) $\int \sqrt{2x+7}dx$

D) $\int (1-x)e^x dx$ E) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}dx$ F) $\int \frac{5x^2-x-160}{x^2-25}dx$

3.- Halle una primitiva de $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ que pase por el punto (e,2).

4.- Halle una primitiva de la función $f(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ que pase por el punto (0,1).

5.- Halle una función f(x) sabiendo que su derivada es $f'(x)=3x^2+1$ y que su gráfica pasa por el punto (2,6).

6.- Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^2 x\cdot \sqrt[3]{x^2-1}dx$ b) $\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}dx$

7.- Dadas las curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$ se pide:

A) Represente el recinto que encierran.

B) Halle el área de dicho recinto.

8.- Encuentre el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

9.- Encuentre el área del recinto determinado por las curvas $y = |x - 2|$, $y = -x^2 + 4x - 2$.

10.- Encuentre el área del recinto determinado por las curvas $y = |x|$ e $y = 2 - x^2$.

11.- Dadas las curvas $y = |x^2 - 1|$ e $y = \left\{ \begin{matrix} 1 & si & x > 0 \\ |x+1| & si & x \leq 0 \end{matrix} \right\}$, se pide:

A) Represente el recinto que encierran.

B) Halle el área de dicho recinto.

12.- Determine el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y el eje OX en el intervalo $[0,4]$.

13.- Halle el área encerrada por la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ y los ejes x e y.

14.- Calcule el área encerrada entre las curvas $y = 3x^2 - 6x$, $y = -x^2 + 6x - 8$.

15.- Calcule el área del recinto limitado por $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$.

16.- Encuentre el área limitada por el eje x y la función $f(x) = x - \sqrt{x}$.

17.- Calcule el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, dibujando previamente el recinto.

18.- A) Halle los puntos donde se cortan las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = 2x^2$.

B) Encuentre el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.

19.- Calcule el área encerrada entre las curvas $y = \dfrac{x^2}{4} - x$ e $y = -\dfrac{x^2}{4} + x$, hallando previamente los puntos donde se cortan y representando gráficamente el recinto que encierran.

20.- A) Dibuje el recinto determinado por las curvas $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ y $y=x^2$.

B) Calcule su área.

21.- Encuentre el área del recinto limitado por la función $f(x)=(x-1)^2\cdot(x-4)$, el eje de abcisas y las rectas $x=1, x=5$.

22.- Esboce la gráfica de la función $f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x$ y calcule el área determinada por ella, el eje horizontal y las rectas $x=-1$ y $x=2$.

23.- Calcule el área de la región del plano limitada por el eje x y la curva $y=x^3-9x$.

24.- Calcule el área del recinto determinado por la curva $y=\dfrac{-1}{1+x^2}$ y las rectas y=0, x=-1, x=1.

25.- Se pide la representación gráfica y el área del recinto limitado por la curva $y=x^2-4x$, el eje de abcisas y la recta $x=5$.

26.- Se pide la representación gráfica y el área del recinto limitado por la curva $y=-x^2+3x+4$ y el eje de abcisas en el intervalo $[-2,5]$.

27.- Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, el eje X y las rectas x = -4 y x = -2.

<u>V. PROBABILIDAD.-</u>

1.- En una universidad, el 65% de sus miembros son estudiantes, el 25% profesores y el 10% personal de administración y servicios. Son mujeres el 60% de los estudiantes, el 47% de los profesores y el 52% del personal de administración y servicios. Si seleccionamos al azar un integrante de esa universidad:

a) Determinar la probabilidad de que sea mujer. (0,5595)

b) Sabiendo que la persona seleccionada ha resultado ser hombre, hallar la probabilidad de que sea estudiante. (0,5902)

2.- Cierto día, la probabilidad de que llueva en la ciudad A es 0’3, la de que no llueva en la ciudad B es 0’6 y la de que llueva, al menos, en una de las dos ciudades es 0’5.

a) Calcular la probabilidad de no llueva en ninguna de las dos ciudades. (0,5)
b) Calcular la probabilidad de que llueva en las dos. ¿Son independientes los sucesos ”llueve en la ciudad A” y ”llueve en la ciudad B”? (No)

3.- En un grupo de estudiantes, un 10% sabe inglés y alemán, un 50% sabe inglés pero no alemán y, entre los que saben alemán, un 40% sabe inglés.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes sabe inglés? (60%)
b) ¿Qué porcentaje sabe alemán? (25%)
c) ¿Qué porcentaje sabe alguno de los dos idiomas? (75%)

4.- La probabilidad de aprobar la asignatura A es 2/3 y la de aprobar la asignatura B es 1/2. Además, la probabilidad de aprobar las dos es 1/4.

a) Hallar la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas. (1/12)
b) Calcular la probabilidad de aprobar A, pero no B. (5/12)

5.- Un archivador contiene 70 exámenes del grupo 1, 50 del grupo 2, 100 del grupo 3 y 25 del grupo 4. El 5% de los exámenes del grupo 1, el 3% de los del grupo 2 y el 8% del grupo 3 está suspenso. En el grupo 4 no hay ningún suspenso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un examen al azar, esté suspenso? (0,053061)
b) Se ha elegido un examen y está suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del grupo 2? (0,1153)

6.- Según un estudio, el 35% de una población utiliza el autobús, mientras que el 65% restante no lo hace. En cuanto al tranvía, es utilizado por la mitad y no por la otra mitad. Un 30% no utiliza ninguno de los dos transportes. Si se elige un individuo de la población al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice alguno de los dos transportes? (0,7)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice los dos? (0,15)
c) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice el tranvía, sabiendo que utiliza el autobús? (0.43)

7.- En una clase hay 15 chicos y 15 chicas que van a realizar el siguiente experimento aleatorio: se tiene una caja azul con 10 bolas numeradas de 1 a 10 y una caja verde con 5 bolas numeradas de 1 a 5, se elige al azar una persona de la clase, si es una chica, extrae una bola de la caja azul, y si es un chico, extrae una bola de la caja verde.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un numero par? (9/20)

b) Si el numero extraído ha sido par, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído por una chica? (5/9)